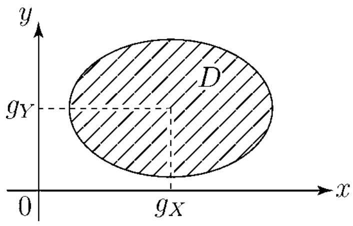
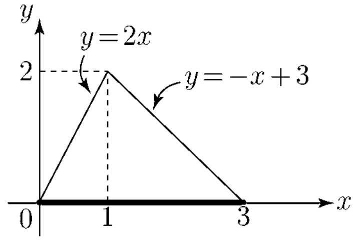
< 質量と重心 4 >



平面上の領域 D に質量がある場合，その質量分布の密度関数が $f(x,y)$ であれば，全質量 M と重心の座標 (g_X, g_Y) は

$$\boxed{M = \iint_D f(x,y)dxdy \ , \ g_X = \frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)dxdy \ , \ g_Y = \frac{1}{M}\iint_D yf(x,y)dxdy}$$

で表される。



例 平面上の領域 D が右図の斜線部分の三角形とする。この三角形の重心の位置 (g_X, g_Y) を求めたい。D にかかる質量は均一に 1 とする。(すなわち $f(x,y)=1$ である。)
このとき全質量 M は

$$M = \iint_D 1dxdy = D \text{ の面積} = \frac{1}{2}\times 3\times 2 = 3$$

である。ここで D を D_1 と D_2 に分けると，

$$D_1 = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leqq x \leqq 1 \ , \ 0 \leqq y \leqq 2x\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \ : \ 1 \leqq x \leqq 3 \ , \ 0 \leqq y \leqq -x+3\right\}$$

より

$$g_X = \frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)\,dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D_1} x\,dxdy + \frac{1}{3}\iint_{D_2} x\,dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{\int_0^{2x} x\,dy\right\} dx + \frac{1}{3}\int_1^3 \left\{\int_0^{-x+3} x\,dy\right\} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left\{\Big[xy\Big]_{y=0}^{y=2x}\right\} dx + \frac{1}{3}\int_1^3 \left\{\Big[xy\Big]_{y=0}^{y=-x+3}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 2x^2\,dx + \frac{1}{3}\int_1^3 (-x^2+3x)\,dx = \frac{4}{3}$$

問 例の場合に g_Y を求めよ。