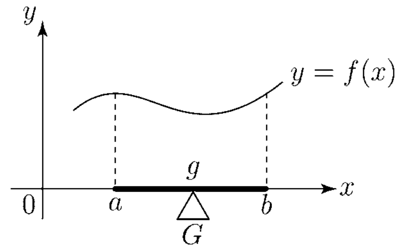
< 質量と重心 3 >

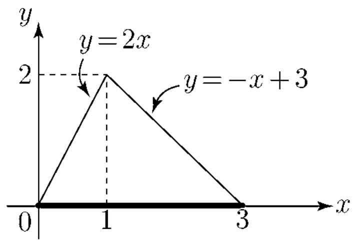
数直線の区間 $[a,b]$ に質量があるとき，その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば，全質量 M と重心の座標 g は



$$\boxed{M=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad g=\frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx}$$

で表される。$f(x)$ を単に**密度関数**とか**重み関数**などという。

例　数直線上の区間 $[0,3]$ に質量があり，その密度関数 $f(x)$ が



$$f(x)=\begin{cases} 2x & : \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x+3 & : \quad 1 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

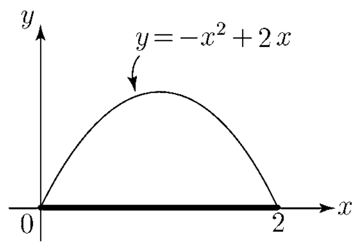
である場合，全質量 M と重心の座標 g は

$$M=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 2x\,dx+\int_1^3(-x+3)dx=\Big[x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{x^2}{2}+3x\Big]_1^3=3$$

$$g=\frac{1}{M}\int_0^3 xf(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x\times 2x\,dx+\frac{1}{3}\int_1^3 x\times(-x+3)dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1+\frac{1}{3}\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 \;=\; \frac{4}{3}$$

問　数直線上の区間 $[0,2]$ に質量があり，その密度関数 $f(x)$ が



$$f(x)=-x^2+2x \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

である場合，全質量 M と重心の座標 g を求めよ。