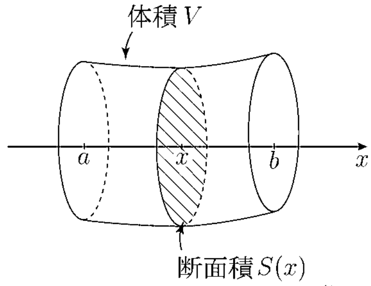
＜面と立体＞

ある立体が図１のように基準線 (x 軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき断面積 $S(x)$ が分かっていれば，図１の立体の体積 V は

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



（図1）

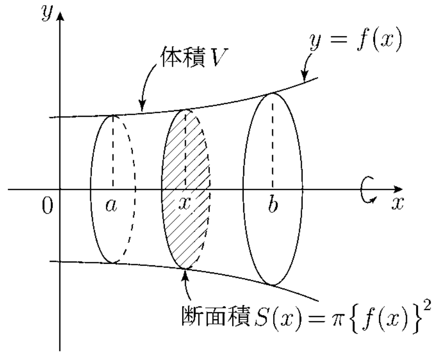
図２のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ と $x=b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V は，断面が半径 $f(x)$ の円であるから

$$S(x)=\pi\{f(x)\}^2$$

より

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi\{f(x)\}dx}$$

となる。



（図2）

例　図３の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体の体積 V は

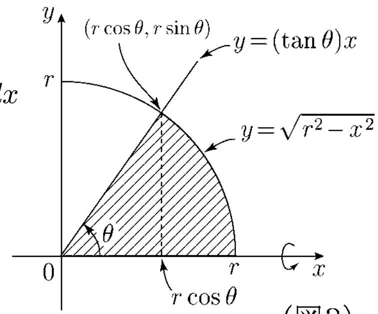
$$V=\int_0^{r\cos\theta}\pi\{(\tan\theta)x\}^2dx+\int_{r\cos\theta}^{r}\pi\left\{\sqrt{r^2-x^2}\right\}^2dx$$

$$=\pi\tan^2\theta\int_0^{r\cos\theta}x^2dx+\pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\tan^2\theta\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{r\cos\theta}+\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\theta}^{r}$$

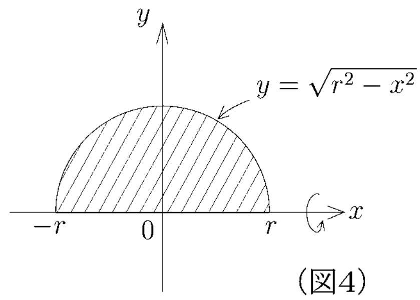
$$=\frac{\pi r^3}{3}\{(1+\tan^2\theta)\cos^3\theta+2-3\cos\theta\}=\frac{\pi r^3}{3}(2-2\cos\theta)$$

(注) ここで三角関数の性質 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いた。



（図3）

問　半径 r の球の体積 V を図４の斜線部分の回転体の体積として求めよ。



（図4）