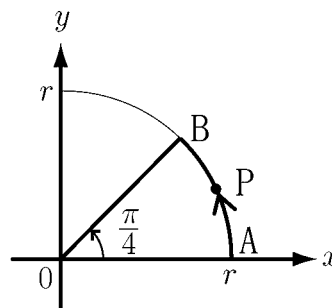


< 平面上の道のり 2 >

例 半径 r , 中心角 $\frac{\pi}{4}$ の弧 AB の長さ ℓ を求めたい。この弧 AB の上を点 P が動くと考え。P は点 A から出発し, 時刻 $\frac{\pi}{4}$ 後に点 B に着くとする。点 P の座標を $P(x(t), y(t))$ とすると



$$x(t) = r \cos(t) \quad , \quad y(t) = r \sin(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

と表される。 ℓ は $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{4}$ まで進んだ点 $P(x(t), y(t))$ の道のりであるから,

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin(t) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = r \cos(t)$$

より

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r dt = \frac{\pi}{4} r \end{aligned}$$

問 1 半径 r , 中心角 θ (ラジアン) の弧の長さ ℓ を求めよ。

問 2 曲線 $y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ の部分の長さ ℓ を求めたい。点 $P(x(t), y(t))$ がこの曲線上を点 A から点 B まで動くとする

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = f(t) \quad , \quad a \leq t \leq b$$

と表される。 ℓ を $f'(t)$ を使った積分の形で表せ。

