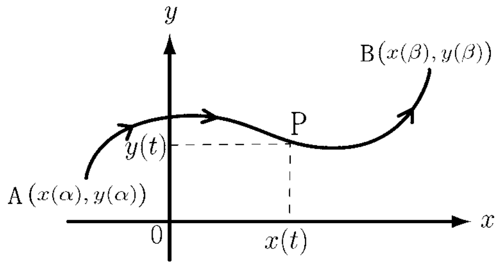
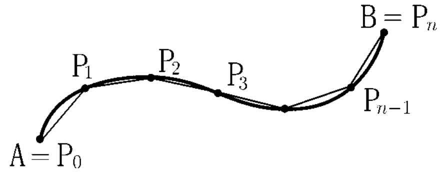
< 平面上の道のり 1 >

平面上を動く点 P の時刻 t における座標が $\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$ であるときこの点が時刻 α(位置 A) から時刻 β (位置 B) までに動いた道のり ℓ を求めたい。時間区間 $\alpha \leqq t \leqq \beta$ を n 等分した分点を



$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

とおき，時刻 t_k の位置を $\mathrm{P}_k\big(x(t_k), y(t_k)\big)$ とし，A=P_0,P_1, $\cdots$,P_n =B の各点を折れ線で結んで ℓ を近似とする。折れ線の長さを ℓ_n とすれば



$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \quad , \quad \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

である。ここで

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

とおく。$x(t)$, $y(t)$ が連続な導関数 $x'(t)$, $y'(t)$ をもつ場合は

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) \fallingdotseq x'(t_{k-1})\Delta t \quad , \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) \fallingdotseq y'(t_{k-1})\Delta t$$

と考えられるから

$$\ell_n \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x'(t_{k-1})\big)^2 + \big(y'(t_{k-1})\big)^2}\, \Delta t \qquad (n \text{ は十分大})$$

とみなせる。そこで $n \to \infty$ のとき $\ell_n \to \ell$ と考えられるので，定積分による区分求積法の定義から

$$\boxed{\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, dt}$$

が求まる。これが点 $\big(x(t)$, $y(t)\big)$ の $\alpha \leqq t \leqq \beta$ までの道のりの長さ ℓ の公式である。