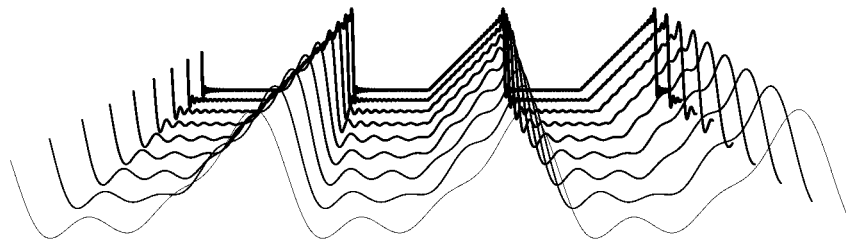


高知工科大学  
基礎数学ワークブック  
(1999年度版)

番外編 1

「フーリエ級数」



電子・光システム工学科  
井上 昌昭 著

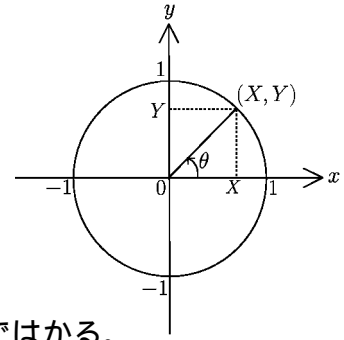
## < 三角関数 >

右図のような場合に

$$\sin \theta = Y \quad (\text{正弦})$$

$$\cos \theta = X \quad (\text{余弦})$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} \quad (\text{正接})$$



と定め、これらを三角関数という。角度  $\theta$  は通常弧度法ではかる。

問 1 下の表を完成させよ。

度数法		$-540^\circ$		$-180^\circ$		$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$		$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$			$720^\circ$	
弧度法	$-4\pi$		$-2\pi$		$-\frac{\pi}{2}$	$0$			$\frac{\pi}{3}$		$\pi$		$2\pi$	$3\pi$		$5\pi$
$\sin \theta$																
$\cos \theta$																

三角関数の定義により、次の性質がわかる。

$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$(2) \sin(-\theta) = -\sin \theta \quad , \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$(3) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \quad , \quad \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$(4) \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta \quad , \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$(5) \sin(\pi - \theta) = \sin \theta \quad , \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$(6) \sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta \quad , \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos \theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

例  $\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{25}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

問 次三角関数の値を求めよ。

$$(1) \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) \qquad (2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi\right) \qquad (3) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 8\pi\right)$$

$$(4) \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 4\pi\right) \qquad (5) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right)$$

## < 加法定理 1 >

正弦と余弦の加法定理は

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

である。前ページの性質 (2) より  $\sin(-\beta) = -\sin \beta$ ,  $\cos(-\beta) = \cos \beta$  であるから

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

がわかる。この加法定理を使うと前ページの性質 (3) ~ (6) が導かれる。

例 1  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  より

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{2} = \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} = -\sin \theta$$

問 1 次式を加法定理によって展開し,  $\sin \theta$  又は  $\cos \theta$  を用いて表せ。

(1)  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) =$

(2)  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) =$

例 2

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta$$

問 2 次式を  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  で表せ。

(1)  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

(2)  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

(3)  $\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$

(4)  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

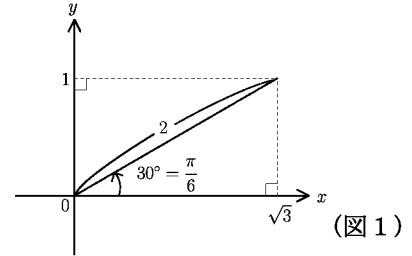
## < 加法定理 2 >

例 1  $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$

$$= 2 \left( (\sin \theta) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (\cos \theta) \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 2 \left( \sin \theta \cos \frac{\pi}{6} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

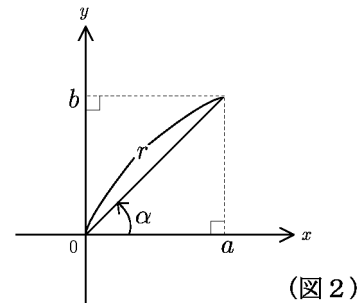
$$= 2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$$



一般に定数  $a, b$  と角度  $\alpha$  が  
図 2 の場合に

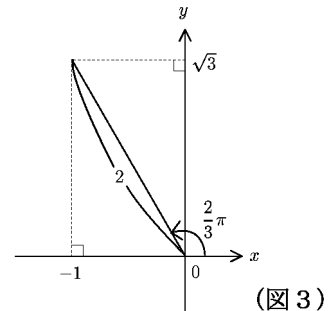
$$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$$

が成り立つ。ここで  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  である。



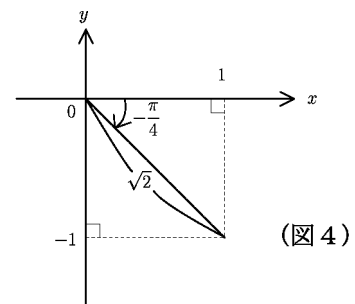
例 2  
図 3 より

$$-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left( \theta + \frac{2}{3}\pi \right)$$



例 3  
図 4 より

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)$$



問 次式を  $r \sin(\theta + \alpha)$  の形にせよ。

(1)  $\sin \theta + \cos \theta$   
=

(2)  $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$   
=

(3)  $\cos \theta - \sin \theta$   
=

(4)  $-4 \cos \theta - 4\sqrt{3} \sin \theta$   
=

### < 加法定理 3 >

2 ページの加法定理に対して,  $\alpha = \beta = \theta$  とおくと

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \dots (1)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \dots (2)$$

が導かれる。この式を倍角の公式という。三角関数の性質

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \dots (3)$$

を使うと (2) 式は

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \dots (4)$$

と表される。この式から

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}}$$

と表されるから,  $\theta$  のかわりに  $\frac{\theta}{2}$  を代入すると

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \dots (5)$$

が導かれる。(5) 式をコサインの半角の公式という。

問 1 上と同様にして, サインの半角の公式を求めよ。

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) =$$

例 2 ページの加法定理において  $\alpha = 2\theta, \beta = \theta$  とおくと

$$\begin{aligned} \sin(3\theta) &= \sin(2\theta) \cos \theta + \cos(2\theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

問 2 例と同様にして,  $\cos(3\theta)$  を  $\cos \theta$  だけで表せ。

$$\cos(3\theta) =$$

## < 積和公式 >

2 ページの加法定理から次の公式が導かれる。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \cdots (1)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \} \cdots (2)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \} \cdots (3)$$

これらの公式を積を和にする公式とか略して積和公式などという。  
これらの公式は右辺を加法定理によって展開し、整理すると左辺が導かれる。

例 1 (3) 式で  $\alpha = \beta = \theta$  とおくと  $\cos 0 = 1$  より

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \{ \cos(2\theta) + \cos 0 \} = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

が得られる。

問 1 上の (1) と (2) で  $\alpha = \beta = \theta$  とおくことにより、次式を例 1 のようになおせ。

$$(1) \sin \theta \cos \theta = \qquad (2) \sin^2 \theta =$$

例 2  $\alpha = 2t$ ,  $\beta = 3t$  のとき、上の公式より

$$\sin(2t) \cos(3t) = \frac{1}{2} \{ \sin(5t) + \sin(-t) \} = \frac{1}{2} \{ \sin(5t) - \sin(t) \}$$

$$\sin(2t) \sin(3t) = \frac{1}{2} \{ \cos(-t) - \cos(5t) \} = \frac{1}{2} \{ \cos(t) - \cos(5t) \}$$

$$\cos(2t) \cos(3t) = \frac{1}{2} \{ \cos(5t) + \cos(t) \}$$

問 2 次の三角関数の積を例 2 のような三角関数の和の形にせよ。

$$(1) \sin(5t) \cos(4t) \qquad (2) \sin(5t) \sin(4t) \qquad (3) \cos(5t) \cos(4t)$$

= \qquad = \qquad =

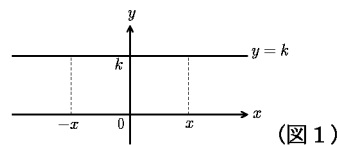
$$(4) \sin(mt) \cos(nt) \qquad (5) \sin(mt) \sin(nt) \qquad (6) \cos(mt) \cos(nt)$$

= \qquad = \qquad =

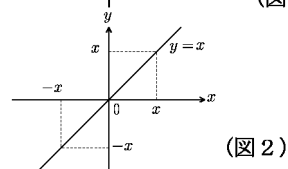
## < 偶関数と奇関数 1 >

関数  $f(x)$  が  $f(-x) = f(x)$  を満たすとき偶関数という。また  $f(-x) = -f(x)$  を満たすとき奇関数という。

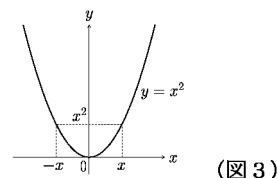
例 (1) 定数  $k$  に対し,  $f(x) = k$  (定数関数) は, 偶関数。(図 1)



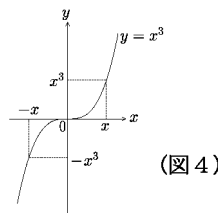
(2)  $f(x) = x$  のとき  
 $f(-x) = -x = -f(x)$   
 より  $f(x)$  は奇関数 (図 2)



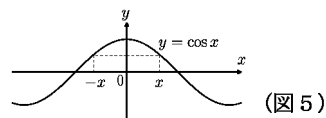
(3)  $f(x) = x^2$  のとき  
 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$   
 より  $f(x)$  は偶関数 (図 3)



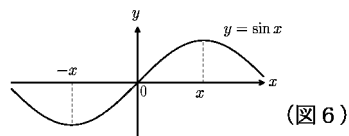
(4)  $f(x) = x^3$  のとき  
 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$   
 より  $f(x)$  は奇関数 (図 4)



(5)  $f(x) = \cos x$  のとき  
 $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$   
 より  $f(x)$  は偶関数 (図 5)



(6)  $f(x) = \sin x$  のとき  
 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$   
 より  $f(x)$  は奇関数 (図 6)



問 次の関数は偶関数か奇関数かどちらであるか答えよ。

(1)  $f(x) = x^4$

(2)  $f(x) = x^5$

(3)  $f(x) = x^6$

(4)  $f(x) = x^7$

(5)  $f(x) = \cos(2x)$

(6)  $f(x) = \sin(2x)$

(7)  $f(x) = \cos(3x)$

(8)  $f(x) = \sin(3x)$

(9)  $f(x) = \sin^2(x)$

## < 偶関数と奇関数 2 >

例 1  $f_1(x) = x^3$ ,  $f_2(x) = x^5$  は共に奇関数であるが、積

$$f_1(x)f_2(x) = x^3 \times x^5 = x^8$$

は偶関数になる。

例 2  $f_1(x) = x^3$ ,  $f_2(x) = \sin x$  は共に奇関数であるが、

積  $f(x) = f_1(x)f_2(x) = x^3 \sin x$  は

$$f(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = (-x^3) \times (-\sin x) = x^3 \sin x = f(x)$$

より、積  $f_1(x)f_2(x)$  は偶関数になる。

例 3  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = \cos x$  は共に偶関数であり、

積  $f(x) = f_1(x)f_2(x) = x^2 \cos x$  は

$$f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$$

より、積  $f_1(x)f_2(x)$  は偶関数である。

例 4  $f_1(x) = \sin x$  は奇関数、 $f_2(x) = \cos(3x)$  は偶関数である。

積  $f(x) = f_1(x)f_2(x) = \sin x \cos(3x)$  は

$$f(-x) = \sin(-x) \times \cos(-3x) = (-\sin x) \times \cos(3x) = -\sin x \cos(3x) = -f(x)$$

より、積  $f_1(x)f_2(x)$  は奇関数になる。

問 1 次の関数は偶関数か奇関数か答えよ。

(1)  $x^2 \times x^4$

(2)  $x^2 \times x^5$

(3)  $x^3 \times x^7$

(4)  $x \sin(2x)$

(5)  $x^2 \cos(3x)$

(6)  $x^3 \cos(5x)$

(7)  $\sin(2x) \sin(3x)$

(8)  $\sin(4x) \cos(3x)$

(9)  $\cos(2x) \cos(5x)$

問 2 以下の  の中に偶関数か奇関数かどちらかの言葉を記入せよ。

(1) 奇関数  $\times$  奇関数 =

(2) 偶関数  $\times$  偶関数 =

(3) 奇関数  $\times$  偶関数 =

## < 正弦波のグラフ >

定数  $A, B, C$  に対し,  
 正弦関数  $y = A \sin(Bx + C)$   
 のグラフを正弦波という。  
 $A, B, C$  が正の数ならば, グラフは  
 図1のような周期関数であり,

この場合は  
 周期 =  $\frac{2\pi}{B}$

振幅 =  $A$

初期位相 =  $-\frac{C}{B}$

となる。

例1 図2の正弦波の式を求めたい。

図より  $-\frac{\pi}{2}$  から  $\frac{3}{2}\pi$  までが一つの周期  
 であるから,

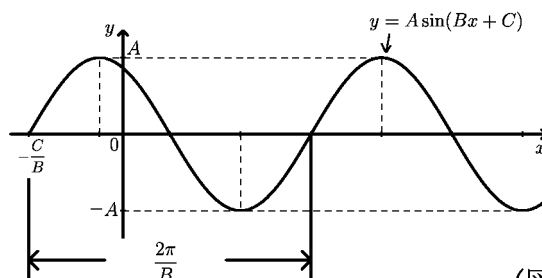
$$\text{周期} = \frac{3}{2}\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 2 (= A)$$

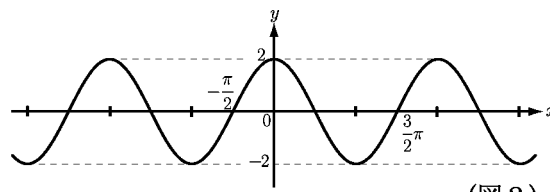
$$\text{初期位相} = -\frac{\pi}{2} \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

$$\text{より } A = 2, B = 1, C = \frac{\pi}{2}$$

よって図2は  $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  のグラフである。



(図1)



(図2)

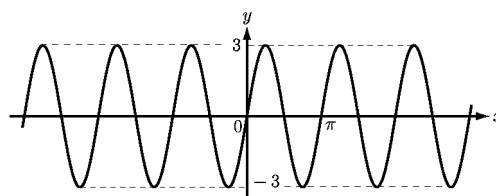
例2 図3の正弦波の式を求めたい。

$$\text{周期} = \pi \left(= \frac{2\pi}{B}\right)$$

$$\text{振幅} = 3 (= A)$$

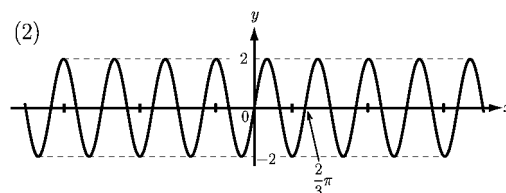
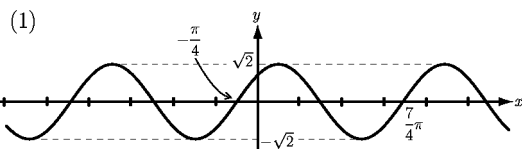
$$\text{初期位相} = 0 \left(= -\frac{C}{B}\right)$$

より  $A = 3, B = 2, C = 0$  よって図3は  $y = 3 \sin(2x)$  のグラフである。



(図3)

問 次の正弦波の周期, 振幅, 初期位相を求め, グラフの式を求めよ。



## < 同周期正弦波の和 >

例 1  $y = \sin x$  のグラフは, 周期  $2\pi$ , 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 1)

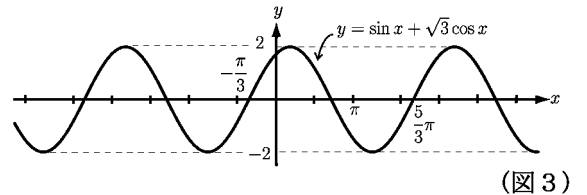
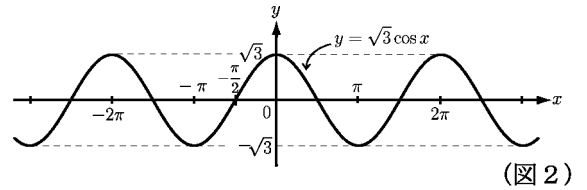
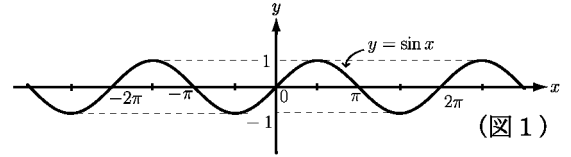
$y = \sqrt{3} \cos x \left( = \sqrt{3} \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right)$  のグラフは周期  $2\pi$ , 振幅  $\sqrt{3}$ , 初期位相  $-\frac{\pi}{2}$  の正弦波

である。(図 2) この 2 つの正弦波の和は, 3 ページの結果より

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$$

となるから, グラフは周期  $2\pi$ , 振幅 2, 初期位相  $-\frac{\pi}{3}$  の正弦波である。

(図 3)



例 2  $y = \sin(2x)$  のグラフは周期  $\pi$ , 振幅 1, 初期位相 0 の正弦波である。(図 4)

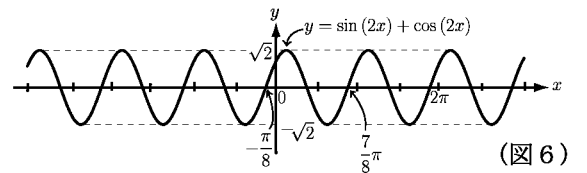
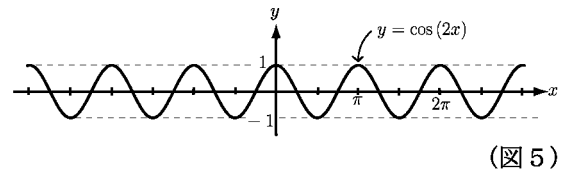
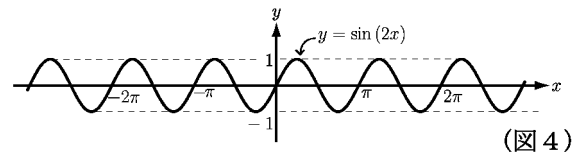
$y = \cos(2x) \left( = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) \right)$  のグラフは

周期  $\pi$ , 振幅 1, 初期位相  $-\frac{\pi}{4}$  の正弦波である。(図 5) この 2 つの正弦波の和は, 3 ページの結果より

$$\sin(2x) + \cos(2x) = \sqrt{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

となるから, グラフは周期  $\pi$ , 振幅  $\sqrt{2}$ , 初期位相  $-\frac{\pi}{8}$  の正弦波である。

(図 6)



一般に周期  $L$  の 2 つの正弦波の和または差は (周期  $L$  の) 正弦波になる。

問 次の正弦波の周期, 振幅および初期位相を求めよ。

- (1)  $\sin x + \cos x$  , (2)  $\sqrt{3} \sin(2x) + \cos(2x)$  , (3)  $\sin(3x) - \cos(3x)$

## < 異周期正弦波の和 >

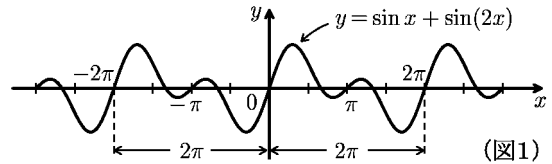
### 例1 前ページの図より

$y = \sin x$  のグラフは周期  $2\pi$  の正弦波であり、 $y = \sin(2x)$  のグラフは周期  $\pi$  の正弦波である。しかし、その和

(1)  $y = \sin x + \sin(2x)$

はもはや正弦波ではない(図1)。

しかし図1を見ると  $-2\pi \leq x \leq 0$  の範囲の波形と  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲の波形が同じである。つまり(1)のグラフは周期  $2\pi$  の周期関数である。前ページの図4をよく見ると、 $y = \sin(2x)$  のグラフは基本周期が  $\pi$  であるが、2つの波を一つの波形と考えると、周期  $2\pi$  の周期関数とも考えられる。 $\sin x$  と  $\sin(2x)$  が共に周期  $2\pi$  の周期関数であるから、その和も周期  $2\pi$  の周期関数になる。



### 例2 $y = \cos(2x) + \sin(3x)$ のグラフ

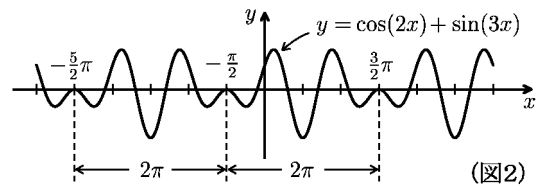
は図2のような周期  $2\pi$  の周期関数になる。

$\cos(2x)$  と  $\sin(3x)$  の周期は以下のようになる。

	基本周期	倍周期	3倍周期
$\cos(2x)$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$
$\sin(3x)$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$2\pi$

… 2つの波の周期  $2\pi$

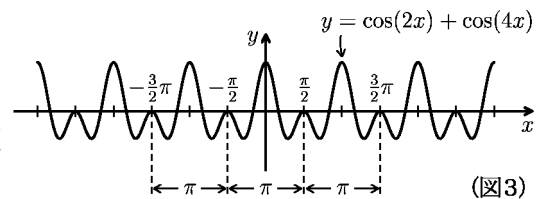
… 3つの波の周期  $2\pi$



### 例3 $y = \cos(2x) + \cos(4x)$ のグラフは図3のように周期 $\pi$ の周期関数になる。

	基本周期	倍周期
$\cos(2x)$	$\pi$	$2\pi$
$\cos(4x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$

… 2つの波の周期  $\pi$



(注)  $\sin(nx)$  や  $\cos(nx)$  の基本周期は  $\frac{2\pi}{n}$  である。

問 次の関数の周期を求めよ。

(1)  $\cos(x) + \cos(3x)$

(2)  $\sin(2x) + \cos(5x)$

(3)  $\cos(3x) + \sin(6x)$

## < 周期 $2\pi$ の関数 1 >

**例題** 右の図1, 図2, 図3のグラフはどの関数のグラフであるか。下の(1)から(6)の中から選べ。

(1)  $y = 3 + \sin x + \sin(2x)$

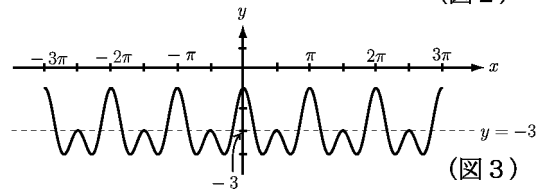
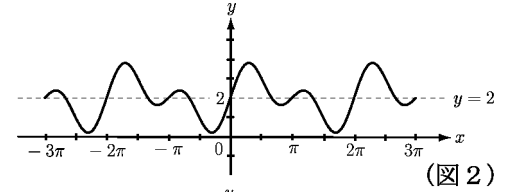
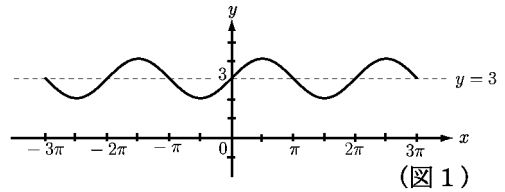
(2)  $y = 1 + \cos(2x)$

(3)  $y = -3 + \cos(2x) + \cos(4x)$

(4)  $y = 2 + \sin x + \sin(2x)$

(5)  $y = 3 + \sin x$

(6)  $y = 2 + \cos(2x) + \cos(4x)$



(解答) 図1は正弦波を  $y$  軸方向に3だけ平行移動したものであるから(5)の関数である。

図2は前ページ図1の波形を  $y$  軸方向に2だけ平行移動したものであるから(4)の関数である。

図3は前ページ図3の波形を  $y$  軸方向に-3だけ平行移動したものであるから(3)の関数である。

(答) 図1: $y = 3 + \sin x$  , 図2: $y = 2 + \sin x + \sin(2x)$

図3: $y = -3 + \cos(2x) + \cos(4x)$

**問** 右の図4, 図5, 図6のグラフの式を下の(1)~(6)の中から選べ。

(1)  $y = 2 + \sin(2x)$

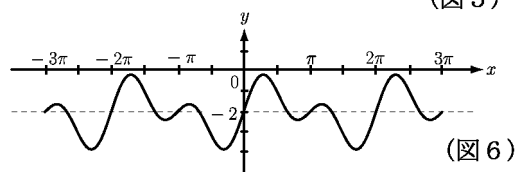
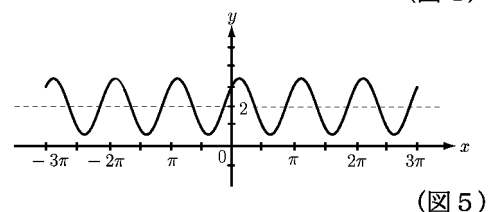
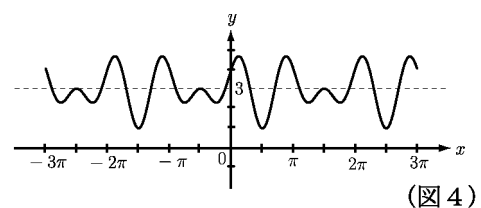
(2)  $y = 3 + \sin x + \sin(2x)$

(3)  $y = 3 + \cos(2x) + \sin(3x)$

(4)  $y = 2 + \sin(2x) + \cos(2x)$

(5)  $y = -2 + \sin x + \sin(2x)$

(6)  $y = -2 + \cos(2x) + \sin(3x)$



## < 周期 $2\pi$ の関数 2 >

前ページの図 1、図 2 はいずれも周期  $2\pi$  の周期関数である。また前ページの図 3 は基本周期が  $\pi$  であるが、倍周期は  $2\pi$  であるから、周期  $2\pi$  の周期関数とも考えられる。自然数  $n$  に対し、

$$\sin(nx), \quad \cos(nx)$$

は基本周期が  $\frac{2\pi}{n}$  であるが、 $n$  倍周期は  $2\pi$  であるから、これらの関数もまた周期  $2\pi$  の周期関数である。

定数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  に対し、関数

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \end{aligned}$$

を三角多項式という。三角多項式もまた周期  $2\pi$  の周期関数である。

**例 1**  $y = \cos^2 x$  は周期  $2\pi$  の周期関数である。4 ページの式より

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

であるから、 $\cos^2 x$  も三角多項式の 1 つである。

**例 2** 4 ページの例から

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

より

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin(3x)$$

であるから、 $\sin^3 x$  も三角多項式の 1 つである。

一般に  $\sin^n x$  や  $\cos^n x$  は三角多項式の形になおせる。

**問** 次の関数を三角多項式の形にせよ。

(1)  $\sin^2 x$

(2)  $\cos^3 x$

### < 周期 $2\pi$ の問題 3 >

例題 関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  が

$$f(x) = 3 \cos x - \cos(3x) + \frac{3}{5} \cos(5x) - \frac{3}{7} \cos(7x)$$

$$g(x) = 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x)$$

$$-\frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x)$$

$$h(x) = 2 + \cos(5x) + \sin(5x)$$

であるとき、 $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  のグラフは  
右の図 1 ~ 図 3 のどれか答えよ。

(解答)

$f(x)$  は偶関数である。6 ページの例  
より偶関数のグラフは  $y$  軸に関して  
対称であるから、 $f(x)$  のグラフは図 3  
である。

$g(x)$  は奇関数であり、奇関数の  
グラフは原点に関して対称である  
から、 $g(x)$  のグラフは図 2 である。  
 $h(x)$  は 9 ページのように正弦波の  
波形であるから、図 1 である。

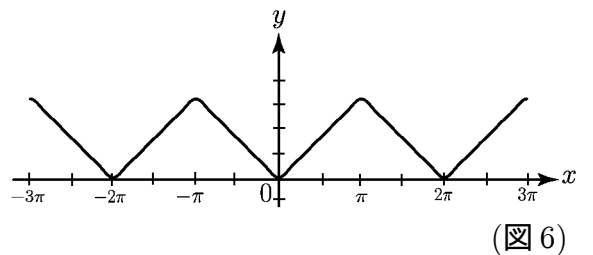
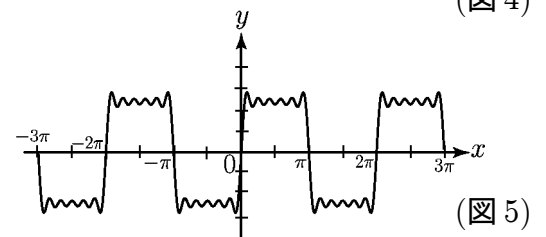
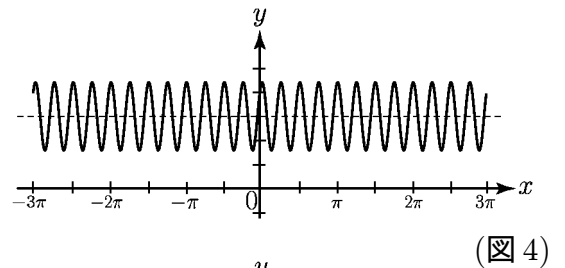
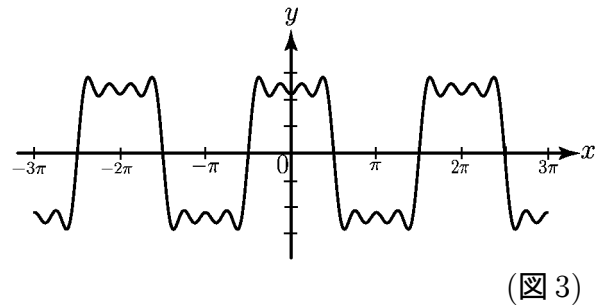
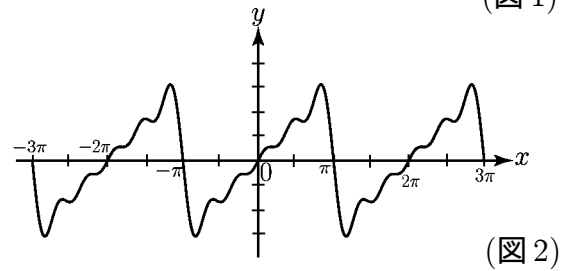
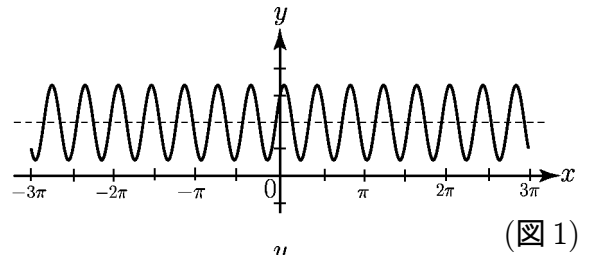
問 以下の関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  の  
グラフを右の図 4 ~ 図 6 から  
えらべ。

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos(3x) - \frac{4}{25\pi} \cos(5x) - \frac{4}{49\pi} \cos(7x)$$

$$g(x) = 3 \sin x + \sin(3x) + \frac{3}{5} \sin(5x)$$

$$+\frac{3}{7} \sin(7x) + \frac{1}{3} \sin(9x) + \frac{3}{11} \sin(11x)$$

$$h(x) = 3 + \cos(8x) + \sin(8x)$$



## < 周期 $2\pi$ の関数 4 >

例1  $f(x) = 2 + 1.7 \cos x - 0.5 \cos(2x) + 0.4 \sin(3x)$   
 のグラフは図1の波形である。このとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 0$$

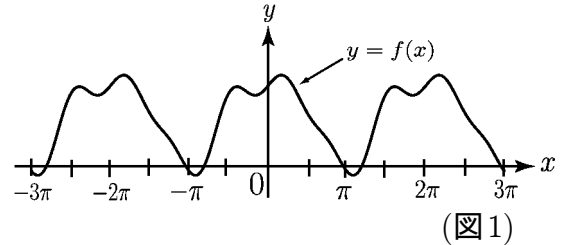
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 1.7, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx = -0.5, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx = 0.4, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(3x) dx = 0$$

$n$  が4以上の自然数に対し

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$$

が成り立つ(計算は次ページ以降で説明する)。



(図1)

例2  $f(x) = 1.5 + 1.3 \cos x + 1.2 \sin(2x) - 1.25 \cos(3x)$   
 のグラフは図2の波形である。このとき

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 1.5, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 1.3, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) dx = 1.2$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(3x) dx = -1.25, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (n \geq 4)$$

が成り立つ。

問  $f(x)$  は三角多項式で、

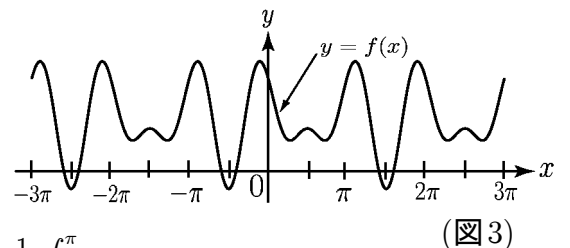
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2.1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx = 1.6, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx = -1.2, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(3x) dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0 \quad (n \geq 4)$$

が成り立つ。 $f(x)$  の式を類推せよ(注.  $y = f(x)$  のグラフは図3である)。



(図3)

## < 積分 1 >

前ページのように三角多項式は積分することによって式が求まる。  
その仕組みを以後のページで解説する。まず積分の復習をしよう。

[不定積分の定義]

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{不定積分})$$

例 1  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$  より  $\int \cos x dx = \sin x + C$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \text{ より } \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(2x)) = 2 \cos(2x) \text{ より } \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(3x)) = -3 \sin(3x) \text{ より } \int \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし  $n \neq 0$ )

(1)  $\int \cos(4x) dx =$  (2)  $\int \sin(5x) dx =$

(3)  $\int \cos(nx) dx =$  (4)  $\int \sin(nx) dx =$

例 2 三角関数の積の不定積分は積和公式 (5 ページ) によって以下のようにする。

$$(1) \int \cos^2 x dx = \int \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right\} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

$$(2) \int \sin(2x) \sin(3x) dx = \int \left\{ \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos(5x) \right\} dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin(5x) + C$$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int \sin^2 x dx$  (2)  $\int \cos^2(2x) dx$   
= =

(3)  $\int \sin^2(3x) dx$  (4)  $\int \sin(3x) \sin(2x) dx$   
= =

(5)  $\int \cos(2x) \cos(4x) dx$  (6)  $\int \sin(4x) \cos(5x) dx$   
= =

## < 積分 2 >

[ 定積分の定義 ]

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \left[ F(x) \right]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

例

$$(1) \int_0^\pi \cos^2 x dx = \left[ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \left\{ \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4} \sin(2\pi) \right\} - \left\{ 0 + \frac{1}{4} \sin 0 \right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_{-\pi}^\pi \sin(2x) \sin(3x) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin(5x) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ = \left\{ \frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{10} \sin(5\pi) \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \sin(-\pi) - \frac{1}{10} \sin(-5\pi) \right\} = 0$$

問 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^\pi \sin^2 x dx =$$

$$(2) \int_{-\pi}^\pi \cos^2(3x) dx =$$

$$(3) \int_{-\pi}^\pi \sin^2(4x) dx =$$

$$(4) \int_{-\pi}^\pi \sin(x) \sin(4x) dx =$$

$$(5) \int_{-\pi}^\pi \cos(3x) \cos(4x) dx =$$

$$(6) \int_{-\pi}^\pi \sin(x) \cos(4x) dx =$$

## < 積分 3 >

関数  $y = f(x)$  のグラフが図 1 の場合，  
斜線部分の面積を  $S_1, S_2$  とすると

$$\int_a^b f(x)dx = S_1, \quad \int_b^c f(x)dx = -S_2$$

となる。すなわち

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = S_1 - S_2$$

となる。この性質を使うと以下の事がわかる。

[ 1 ]  $f(x)$  が偶関数の場合は，グラフは  
図 2 のように  $y$  軸対称になるから

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad (\text{偶関数の積分})$$

となる。

[ 2 ]  $f(x)$  が奇関数の場合は，グラフは  
図 3 のように原点对称になるから

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \quad (\text{奇関数の積分})$$

となる。

例 1 奇関数  $\times$  奇関数 = 偶関数だから

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \sin(3x)dx &= 2 \int_0^{\pi} \sin(2x) \sin(3x)dx = 2 \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos(5x) \right\} dx \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin(5x) \right]_0^{\pi} = 2 \left\{ \left( \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{10} \sin(5\pi) \right) - \left( \frac{1}{2} \sin(0) - \frac{1}{10} \sin(0) \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

例 2 奇数関数  $\times$  偶関数 = 奇関数だから

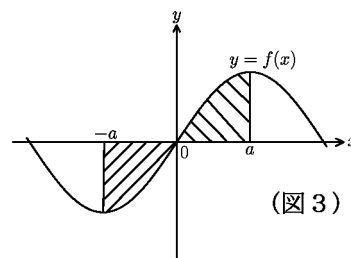
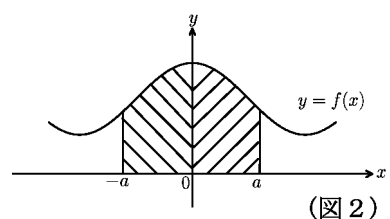
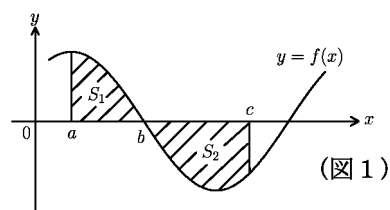
$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(2x)dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos(5x)dx = 0$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1)  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(3x)dx =$

(2)  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \sin(2x)dx =$

(3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x) \sin(3x)dx =$



## < 積分 4 >

問 1 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(4x) dx =$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(5x) dx =$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \sin(4x) dx =$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos(4x) dx =$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x) \cos(4x) dx =$$

$$(6) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) \cos(5x) dx =$$

問 2 自然数  $n$  と  $m$  ( $n \neq m$ ) に対し, 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx =$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx =$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx =$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx =$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx =$$

$$(6) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx =$$

## < 積分 5 >

部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

例 1

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \cos(3x)dx &= \int_0^\pi x \times \left(\frac{1}{3} \sin(3x)\right)' dx \\ &= \left[x \times \frac{1}{3} \sin(3x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \frac{1}{3} \sin(3x)dx \\ &= \left\{\frac{\pi}{3} \sin(3\pi) - 0\right\} - \int_0^\pi \frac{1}{3} \sin(3x)dx \\ &= 0 - \left[-\frac{1}{9} \cos(3x)\right]_0^\pi = \left[\frac{1}{9} \cos(3x)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{9} \cos(3\pi) - \frac{1}{9} \cos 0 = -\frac{2}{9}\end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin(3x)dx &= \int_0^\pi x \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)' dx \\ &= \left[x \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \left(-\frac{1}{3} \cos(3x)\right) dx \\ &= -\frac{\pi}{3} \cos(3\pi) - 0 + \int_0^\pi \frac{1}{3} \cos(3x)dx \\ &= \frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{9} \sin(3x)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \sin(3\pi) - \frac{1}{9} \sin(0) = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1)  $\int_0^\pi x \cos(4x)dx =$

(2)  $\int_0^\pi x \sin(4x)dx =$

(3)  $\int_0^\pi x \cos(5x)dx =$

(4)  $\int_0^\pi x \sin(5x)dx =$

## < 積分 6 >

例題  $n$  を自然数とするとき

$$I_n = \int_0^\pi x \cos(nx) dx$$

を求めよ。

(解答) 前ページのように部分積分の公式を使う。  $\sin(n\pi) = 0$  より

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \int_0^\pi x \left( \frac{1}{n} \sin(nx) \right)' dx \\ &= \left[ x \times \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \times \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\ &= \frac{\pi}{n} \sin(n\pi) - 0 - \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\ &= - \left[ -\frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^\pi = \left[ \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{n^2} \{ \cos(n\pi) - \cos(0) \} \end{aligned}$$

ここで  $\cos 0 = 1$  であるが,  $\cos(n\pi)$  は  $n$  が奇数か偶数かによって異なる。

(1)  $n$  が奇数のとき  $\cos(n\pi) = -1$  より

$$I_n = \frac{1}{n^2} \{-1 - 1\} = -\frac{2}{n^2}$$

(2)  $n$  が偶数のとき  $\cos(n\pi) = 1$  より

$$I_n = \frac{1}{n^2} \{1 - 1\} = 0$$

問 自然数  $n$  に対し, 次の定積分の値を求めよ。

(1)  $I_n = \int_0^\pi \sin(nx) dx$

(2)  $I_n = \int_0^\pi x \sin(nx) dx$

## < 三角多項式の係数 1 >

例 1  $n$  を自然数とすると  $\sin(n\pi) = 0$ ,  $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi)$  より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} \sin(n\pi) - \frac{1}{n} \sin(-n\pi) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \cos(-n\pi) = 0$$

例 2  $f(x) = 7 + 1.5 \cos x + 2.4 \sin(2x) - 3.5 \cos(3x)$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 7 dx + 1.5 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + 2.4 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx - 3.5 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) dx \\ &= \left[ 7x \right]_{-\pi}^{\pi} + 1.5 \times 0 + 2.4 \times 0 - 3.5 \times 0 \\ &= 7\pi - (-7\pi) = 14\pi \end{aligned}$$

例 3  $f(x) = 3.1 - 0.7 \sin x + 1.3 \cos(2x) + 5.8 \cos(4x)$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 3.1 dx - 0.7 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + 1.3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx + 5.8 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x) dx \\ &= \left[ 3.1x \right]_{-\pi}^{\pi} - 0.7 \times 0 + 1.3 \times 0 + 5.8 \times 0 = 6.2\pi \end{aligned}$$

問  $f(x)$  が以下の場合に  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$  を求めよ。(ただし  $n$  は自然数)

(1)  $f(x) = 5.2 - 3.1 \cos x + 2.7 \sin(5x)$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$

(2)  $f(x) = -3.7 - 4.9 \cos(3x) - 6.8 \sin(7x)$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$

(3)  $f(x) = a_0 + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx =$

## ＜ 三角多項式の係数 2 ＞

18 ページおよび前ページより自然数  $n, m (n \neq m)$  に対し次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi & \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0 & \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0 & \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0 & \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0 \end{aligned}$$

**例**  $f(x) = 6 + 7 \cos x - 4 \sin x + 5 \cos(2x) - 8 \sin(3x)$  に対し

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx &= 6 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + 7 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx - 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx \\ &\quad + 5 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cos x dx - 8 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos x dx \\ &= 6 \times 0 + 7 \times \pi - 4 \times 0 + 5 \times 0 - 8 \times 0 = 7\pi \end{aligned}$$

**問** 例と同じ関数  $f(x)$  に対し、次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx = \qquad (2) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx =$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) dx = \qquad (4) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(3x) dx =$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx = \qquad (6) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(4x) dx =$$

$$(7) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(4x) dx = \qquad (8) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(5x) dx =$$

## < 三角多項式の係数 3 >

例 3 次の三角多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$$

に対し, 前ページの公式から

$$\begin{aligned} (1) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= a_0 \times \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + a_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + b_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + a_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx \\ &\quad + b_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx + a_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) dx + b_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) dx \\ &= a_0 \times 2\pi + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times 0 + b_2 \times 0 + a_3 \times 0 + b_3 \times 0 = 2\pi a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx &= a_0 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) dx + a_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos(2x) dx + b_1 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos(2x) dx \\ &\quad + a_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x) dx + b_2 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \cos(2x) dx + a_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x) \cos(2x) dx + b_3 \times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos(2x) dx \\ &= a_0 \times 0 + a_1 \times 0 + b_1 \times 0 + a_2 \times \pi + b_2 \times 0 + a_3 \times 0 + b_3 \times 0 = \pi a_2 \end{aligned}$$

問 例と同じ  $f(x)$  に対し, 次の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx =$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x dx =$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(2x) dx =$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(3x) =$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx =$$

$$(6) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(4x) =$$

$$(7) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(4x) dx =$$

$$(8) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(5x) =$$

## < 三角多項式の係数 4 >

例 3 次の三角多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$$

に対し，前ページの結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 \quad , \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx = \pi a_2$$

であるから，係数  $a_0$  と  $a_2$  は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \quad a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx$$

と表される。

問 1 例と同じ三角多項式  $f(x)$  に対し，以下の係数を例のような  $f(x)$  に関する積分の形で表せ。

(1)  $a_1 =$

(2)  $b_1 =$

(3)  $b_2 =$

(4)  $a_3 =$

(5)  $b_3 =$

問 2  $n$  次の三角多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

に対し，各係数  $a_0, a_k, b_k (1 \leq k \leq n)$  を例のような  $f(x)$  に関する積分の形で表せ。

(1)  $a_0 =$

(2)  $a_k =$

(3)  $b_k =$

## < 三角数列 >

例 1  $a_n = \cos(n\pi)$  のとき

$$a_0 = \cos(0) = 1, \quad a_1 = \cos(\pi) = -1, \quad a_2 = \cos(2\pi) = 1$$

$$a_3 = \cos(3\pi) = -1, \quad a_4 = \cos(4\pi) = 1, \quad a_5 = \cos(5\pi) = -1$$

問 1 次の数列の  $n = 1$  から  $n = 5$  までの項を記せ。

(1)  $a_n = \sin(n\pi)$

$$a_1 = \quad a_2 = \quad a_3 = \quad a_4 = \quad a_5 =$$

(2)  $a_n = \frac{1}{n} \cos(n\pi)$

$$a_1 = \quad a_2 = \quad a_3 = \quad a_4 = \quad a_5 =$$

(3)  $a_n = \frac{1}{n^2} \{1 - \cos(n\pi)\}$

$$a_1 = \quad a_2 = \quad a_3 = \quad a_4 = \quad a_5 =$$

例 2 虚数単位  $i = \sqrt{-1}$  に対し, オイラーの公式より

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \dots$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \dots$$

となる。( + )/2 と ( - )/2i より

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

となる。これを利用すると次のような数列は 2 つの等比数列に分解される。

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \cos(n\theta) = 3^n \times \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{1}{2} \times \{3^n e^{in\theta} + 3^n e^{-in\theta}\} \\ &= \frac{1}{2} \{3^n (e^{i\theta})^n + 3^n (e^{-i\theta})^n\} = \frac{1}{2} (3e^{i\theta})^n + \frac{1}{2} (3e^{-i\theta})^n \end{aligned}$$

問 2 次の数列を例 2 のように 2 つの等比数列に分解せよ。

(1)  $5^n \sin(n\theta)$

=

(2)  $r^n \cos(n\theta)$

=

(3)  $r^n \sin(n\theta)$

=

## < 無限級数 1 >

無限に続く数列  $\{a_n\}$  の各項を順に加えていった形の式

$$(*) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を無限級数または単に級数という。数列  $a_n$  の初項から第  $n$  項までの和を第  $n$  部分和といい

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

で表す。ここで  $n \rightarrow \infty$  のときの  $S_n$  の極限值が存在すればその極限値を  $S$  とすると、

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

と書き、無限級数  $(*)$  は  $S$  に収束するといい、 $S$  を無限級数の和または単に級数の和という。

例 等比数列  $a_n = 5 \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$  の第  $n$  部分和  $S_n$  は

$$S_n = 5 + 5 \times \frac{3}{7} + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \cdots \cdots$$

$$\frac{3}{7}S_n = 5 \times \frac{3}{7} + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \cdots \cdots$$

となる。式 - 式より

$$\left(1 - \frac{3}{7}\right) S_n = 5 - 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n = 5 \left\{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$$

$$S_n = \frac{5 \left\{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}}{1 - \frac{3}{7}}$$

ここで  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\left(\frac{3}{7}\right)^n \rightarrow 0$  であるから

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left\{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{5}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{35}{4}$$

より

$$5 + 5 \times \frac{3}{7} + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \cdots + 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} + \cdots = \frac{35}{4}$$

問 次の無限等比級数の和を求めよ。(ただし  $|r| < 1$ )

$$(1) 4 + 4 \times \frac{2}{5} + 4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + 4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \cdots =$$

$$(2) a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots =$$

## < 無限級数 2 >

前ページの結果より  $|r| < 1$  であれば

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad (\text{無限等比級数の和})$$

が成り立つ。

例 三角級数

$$\left(\frac{3}{7}\right) \cos \theta + \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cos (2\theta) + \cdots + \left(\frac{3}{7}\right)^n \cos (n\theta) + \cdots$$

を考える。25ページのように複素指数を使うと

$$\left(\frac{3}{7}\right)^n \cos (n\theta) = \left(\frac{3}{7}\right)^n \left\{ \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{i\theta}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{-i\theta}\right)^n$$

のように等比数列に分解できる。ここで公比は ( $|e^{i\theta}| = 1$  より)

$$\left|\frac{3}{7}e^{i\theta}\right| = \frac{3}{7} < 1, \quad \left|\frac{3}{7}e^{-i\theta}\right| = \frac{3}{7} < 1$$

であるから、上の等比級数の和の公式が使える。すなわち

$$\begin{aligned} & \frac{3}{7} \cos \theta + \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cos (2\theta) + \cdots + \left(\frac{3}{7}\right)^n \cos (n\theta) + \cdots \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{i\theta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{i\theta}\right)^2 + \cdots \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{-i\theta}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{-i\theta}\right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{i\theta}\right)}{1 - \frac{3}{7}e^{i\theta}} + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{7}e^{-i\theta}\right)}{1 - \frac{3}{7}e^{-i\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \left\{ \frac{e^{i\theta} (1 - \frac{3}{7}e^{-i\theta}) + (1 - \frac{3}{7}e^{i\theta}) e^{-i\theta}}{(1 - \frac{3}{7}e^{i\theta})(1 - \frac{3}{7}e^{-i\theta})} \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \left\{ \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - 2 \times \left(\frac{3}{7}\right)}{1 - \left(\frac{3}{7}\right)(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \left(\frac{3}{7}\right)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{2 \cos \theta - 2 \times \frac{3}{7}}{1 - \left(\frac{3}{7}\right) \times 2 \cos \theta + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{\frac{3}{7} (\cos \theta - \frac{3}{7})}{1 - 2 \left(\frac{3}{7}\right) \cos \theta + \left(\frac{3}{7}\right)^2} \end{aligned}$$

ここで  $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = 1$  と  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$  を使った。

問  $0 < r < 1$  なす実数  $r$  に対して、次の級数の和を求め、例のような形にせよ。

$$r \cos \theta + r^2 \cos (2\theta) + \cdots + r^n \cos (n\theta) + \cdots$$

=

## < フーリエ級数 1 >

三角多項式

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

は周期  $2\pi$  の周期関数である。24 ページの結果より各係数は

$$(*) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (k \geq 1)$$

で定まる。一方13 ページの図5 や図6 を見ると、一般の周期  $2\pi$  の周期関数も三角多項式で近似できることが予想される。そこで一般の周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  に対し、(\*) で定められた係数  $a_0, a_k, b_k$  をとるとき、無限級数

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \end{aligned}$$

は  $f(x)$  を近似としていると考え、

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

と書き、発見者の名前をつけて  $f(x)$  のフーリエ級数 (Fourier series) という。また  $a_0, a_k, b_k$  をフーリエ係数という。

例  $f(x)$  が偶関数のときは

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$$

より  $f(x)$  のフーリエ級数は

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

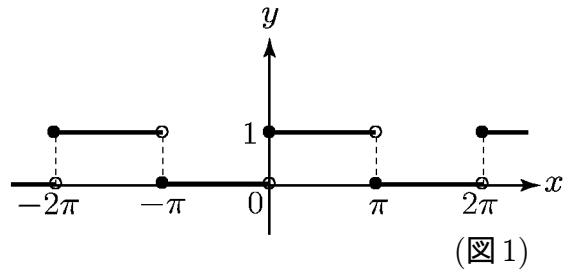
問  $f(x)$  が奇関数の場合にフーリエ係数とフーリエ級数を例のように表せ。

## < フーリエ級数 2 >

例  $f(x)$  が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。

$-\pi \leq f(x) \leq \pi$  の範囲では

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x < \pi \\ 0 & : -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$



である。フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2\pi} [x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

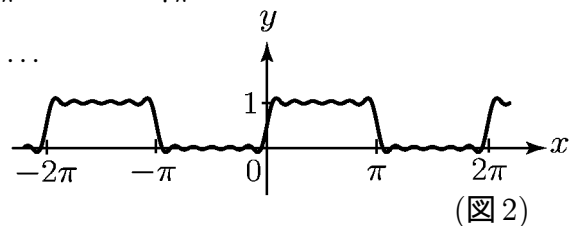
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n} \cos(0) \right) = \begin{cases} 0 & : n \text{ が偶数} \\ \frac{2}{n\pi} & : n \text{ が奇数} \end{cases}$$

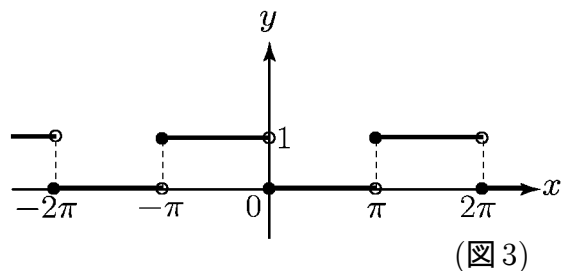
であるからフーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \frac{2}{7\pi} \sin(7x) \\ &\quad + \frac{2}{9\pi} \sin(9x) + \frac{2}{11\pi} \sin(11x) + \dots \end{aligned}$$

となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の  $n = 11$  までの部分和のグラフである。



問  $f(x)$  が図 3 の周期関数であるとき、 $f(x)$  のフーリエ級数を求めよ。



### <フーリエ級数3>

例  $f(x)$  が図1のような周期関数のとき  
 $-\pi \leq x < \pi$  の範囲では

$$f(x) = x$$

であるから、 $f(x)$  は奇関数である。  
 28 ページの結果より奇関数の場合は  
 フーリエ係数は

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

であり、奇関数  $\times$  奇関数 = 偶関数だから

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$$

となり、20 ページの結果から

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & : n \text{ が奇数} \\ -\frac{\pi}{n} & : n \text{ が偶数} \end{cases}$$

であるから

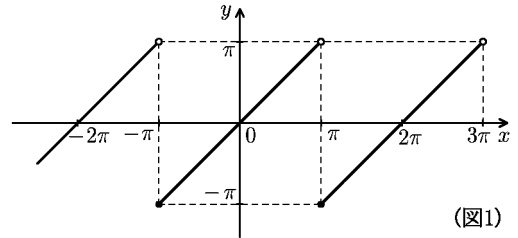
$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & : n \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{n} & : n \text{ が偶数} \end{cases}$$

となり、フーリエ級数は

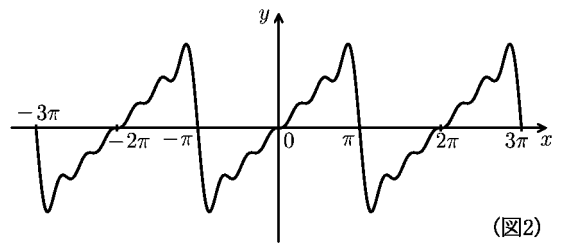
$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \\ &= \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{2}{4} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \frac{2}{6} \sin(6x) + \dots \\ &= 2 \sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) - \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{2}{5} \sin(5x) - \frac{1}{3} \sin(6x) + \dots \end{aligned}$$

となる。図2のグラフはこのフーリエ級数の  $n = 6$  までの部分和の  
 グラフである。

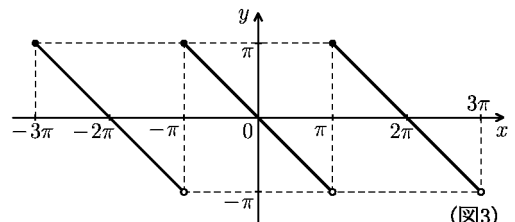
問  $f(x)$  が図3の周期関数であるとき、  
 $f(x)$  のフーリエ級数を求めよ。



(図1)



(図2)



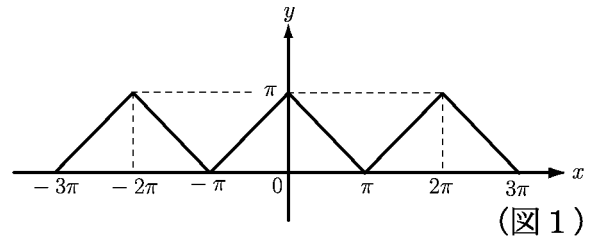
(図3)

## < フーリエ級数 4 >

例  $f(x)$  が図 1 のような周期関数のとき  $-\pi \leq 0 \leq \pi$  の範囲では

$$f(x) = \pi - |x|$$

であるから,  $f(x)$  は偶関数である。



28 ページの例から偶関数の場合のフーリエ級数は

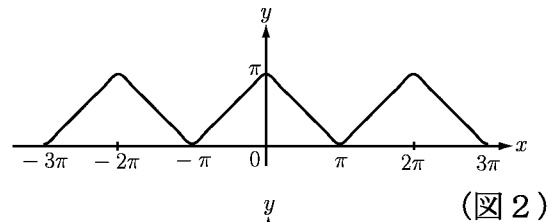
$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \pi x - \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \left[ (\pi - x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-1) \frac{\sin(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ 0 - 0 + \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right\} = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{\cos 0}{n^2} \right\} = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi} & : n \text{ が奇数} \\ 0 & : n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

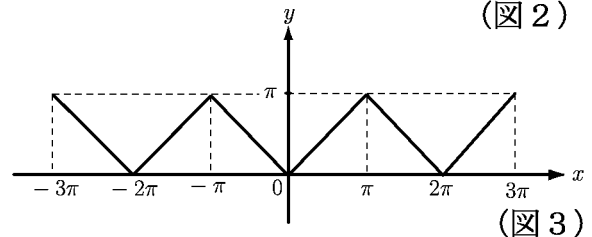
となる。よって  $f(x)$  のフーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left\{ \cos x + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \frac{1}{49} \cos(7x) + \dots \right\} \end{aligned}$$

となる。  
図 2 のグラフはこのフーリエ級数の  $n = 7$  までの部分和のグラフである。



問  $f(x)$  が図 3 の周期関数であるとき,  $f(x)$  のフーリエ級数を求めよ。



## < フーリエ級数 5 >

関数  $f(x)$  に対するフーリエ級数の第  $n$  部分和を

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

とする。フーリエ級数  $S_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$  は元の関数  $f(x)$  と一致するかどうかは場合によって異なる。

**例 1**  $f(x)$  が前ページ (31 ページ) の例のような連続な周期関数のとき、 $f(x)$  と第 7 部分和  $S_7(x)$  のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に、この場合は全ての実数  $x$  でフーリエ級数と元の関数  $f(x)$  が一致している。つまり

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} = S_\infty(x)$$

が全ての実数  $x$  で成り立つ。

**例 2**  $f(x)$  が 30 ページの例の関数の場合、 $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$  で  $f(x)$  は不連続になる。図 1 は  $n = 6$  までの部分 and  $S_6(x)$  と  $f(x)$  のグラフを重ねて表したものである。このグラフでは  $x = \pi$  のとき

$$f(\pi) = -\pi, \quad S_6(\pi) = 0$$

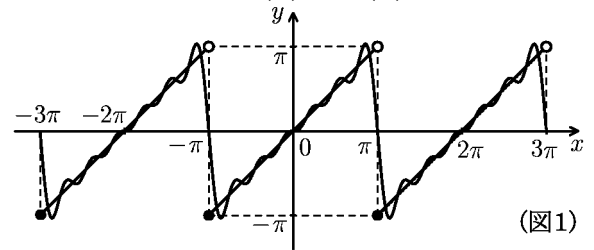
である。実際フーリエ級数  $S_\infty(x)$  は

$$S_\infty(x) = 2 \left\{ \frac{1}{1} \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{5} \sin(5x) - \frac{1}{6} \sin(6x) + \dots \right\}$$

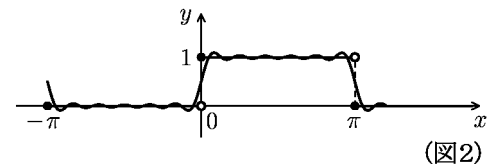
であるが、 $\sin(n\pi) = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であるから  $S_\infty(\pi) = 0$  より  $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$  である。実際

$$f(n\pi) = -\pi, \quad S_\infty(n\pi) = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

となる。しかし、それ以外の  $x$  では  $f(x) = S_\infty(x)$  となる。



**問**  $f(x)$  が 29 ページの例の関数のとき、フーリエ級数の第 11 部分 and  $S_{11}(x)$  と  $f(x)$  のグラフは図 2 のようになる。このとき、フーリエ級数  $S_\infty(x)$  と元の関数  $f(x)$  の  $x = 0, \pi$  のときの値を求めよ。



$$f(0) = \quad, \quad S_\infty(0) =$$

$$f(\pi) = \quad, \quad S_\infty(\pi) =$$

## < デルタ関数 1 >

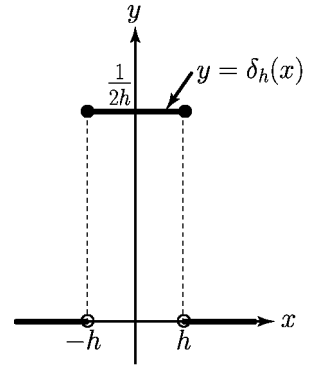
小さい正数  $h > 0$  に対して

$$\delta_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & : |x| \leq h \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

とおく。

一般の関数  $f(x)$  に対して、

$$\begin{aligned} (f * \delta_h)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \delta_h(x-t) dt \\ &= \int_{|x-t| \leq h} f(t) \frac{1}{2h} dt = \int_{x-h}^{x+h} f(t) \frac{1}{2h} dt \end{aligned}$$



とおく。今  $f(x)$  の不定積分を

$$F(x) = \int f(x) dx$$

とおくと、定義から

$$(f * \delta_h)(x) = \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{2h} f(t) dt = \left[ \frac{1}{2h} F(t) \right]_{t=x-h}^{t=x+h} = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

この分母と分子は  $h$  の関数であるから、 $h$  で微分すると、

$$\frac{d}{dh} F(x+h) = f(x+h) \quad , \quad \frac{d}{dh} F(x-h) = -f(x-h) \quad , \quad \frac{d}{dh} (2h) = 2$$

となる。そこで、 $h \rightarrow +0$  の極限をロピタルの定理を使って求めると

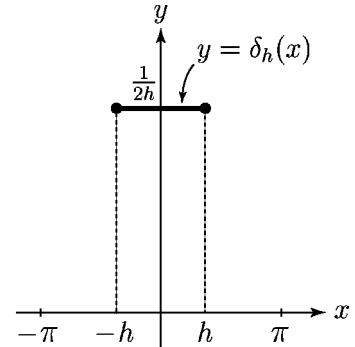
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(x) &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} \end{aligned}$$

問 この極限値を  $f(x)$  の右極限値  $f(x+0)$  と左極限値  $f(x-0)$  を使って表せ。

## <デルタ関数 2>

前ページの関数  $\delta_h(x)$  は、 $0 < h < \pi$  ならば

( )	$\delta_h(x)$ は偶関数で $\delta_h(x) \geq 0$
( )	$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_h(x) dx = 1$
( )	$\lim_{h \rightarrow +0} \delta_h(x) = \begin{cases} +\infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$



を満たす関数である。 $h \rightarrow +0$  のとき極限を関数の一種と考え

$\lim_{h \rightarrow +0} \delta_h(x) = \delta(x) = \begin{cases} +\infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$
---

と書き、ディラックのデルタ関数という。また  $\delta_h(x)$  のような ( ) ~ ( ) の性質を持つ関数をデルタ収束関数という。前ページのように、デルタ収束関数  $\delta_h(x)$  は関数  $f(x)$  に対して、

(*)	$\lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \delta_h(x-t) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$
-----	---

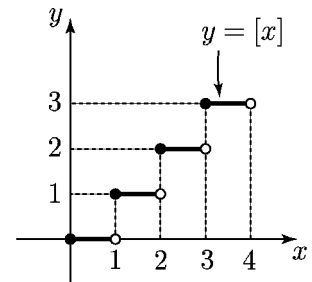
が成立する。(正確に言うと (\*) が成立するためには  $f(x)$  に条件が必要だが、ほとんどの場合は成立すると考えてよい。)

**例 1**  $f(x) = x^2 + 3x$  は連続関数で  $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$  より

$$\lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(4) = \frac{f(4+0) + f(4-0)}{2} = f(4) = 16 + 12 = 28$$

**例 2**  $f(x) = [x]$  (ガウス記号 =  $x$  をこえない最大整数) のとき  $f(3-0) = 2$ ,  $f(3+0) = 3$  より

$$\lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(3) = \frac{f(3+0) + f(3-0)}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$$



**問** 例 2 の場合に次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(2) =$

(2)  $\lim_{h \rightarrow +0} (f * \delta_h)(2.5) =$

## < ポアソン核 >

$0 < r < 1$  なる定数  $r$  と実数  $x$  に対し

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) \right\}$$

とおくと、27 ページの結果より

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{r(\cos x - r)}{1 - 2r \cos x + r^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{2r \cos x - 2r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \left\{ \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} \right\} \end{aligned}$$

となる。 $P_r(x)$  をポアソン核という。

$P_r(x)$  は次の性質がある。

(i)  $P_r(x)$  は偶関数で  $P_r(x) > 0$

(ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1$

(iii)  $\lim_{r \rightarrow 1-0} P_r(x) = \delta(x) = \begin{cases} +\infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$

$P_r(x)$  のグラフは右図のようであり、図 1 は  $r = 0.5$ ,

図 2 は  $r = 0.7$ , 図 3 は  $r = 0.9$  のグラフである。

すなわち  $P_r(x)$  は  $r \rightarrow 1-0$  のときデルタ関数  $\delta(x)$  に収束し、一般の関数  $f(x)$  に対し

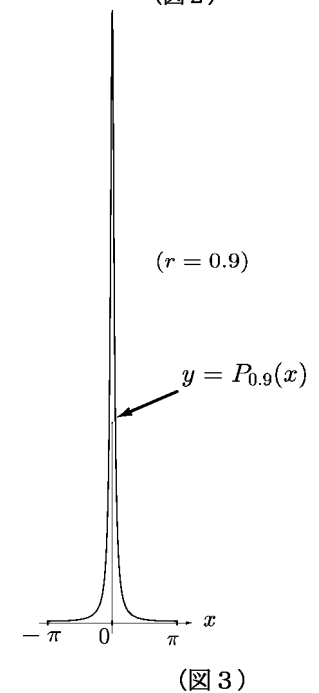
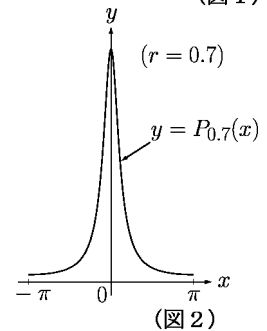
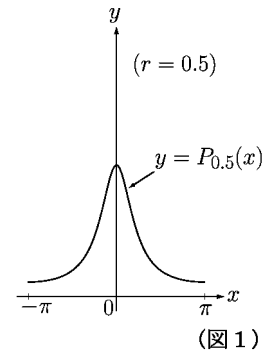
$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (f * P_r)(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x-t) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

が成り立つ。

**問**  $f(x) = [x]$  (前ページ例 2) のとき、次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{r \rightarrow 1-0} (f * P_r)(1) =$

(2)  $\lim_{r \rightarrow 1-0} (f * P_r)(1.5) =$



## <ポアソン積分>

$f(x)$  のフーリエ係数  $a_0, a_n, b_n$  ( $n \geq 1$ ) を  $t$  に関する積分

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

で表すことにする。今  $0 < r < 1$  なる定数  $r$  に対し、

$$f(r, x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(r, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right) \cos(nx) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right) \sin(nx) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \cos(nx) \cos(nt) + \sin(nx) \sin(nt) \right\} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left\{ \cos(nx - nt) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n(x-t)) \right\} dt \end{aligned}$$

となる。この関数  $f(r, x)$  を  $f(x)$  のポアソン積分という。

**問** ポアソン積分  $f(r, x)$  を前ページのポアソン核  $P_r(x)$  をつかって表せ。

## < フーリエ級数の収束 >

$f(x)$  を周期  $2\pi$  の周期関数とする。  $f(x)$  のポアソン積分は前ページの結果より

$$f(r, x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(x-t) dt = (f * P_r)(x)$$

である。35 ページの結果を使うと

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} (f * P_r)(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

であるから

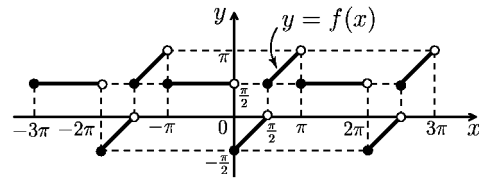
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} = \lim_{r \rightarrow 1-0} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} = \lim_{r \rightarrow 1-0} f(r, x)$$

より

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (\text{フーリエ級数の収束})$$

が全ての  $x$  で成立する。正確に言うと関数  $f(x)$  には“ 区分的になめらか ”という条件が必要だが、ほとんどの周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  に対し成立すると考えてよい。

例  $f(x)$  が右図のような周期関数のとき  $f(x)$  のフーリエ級数を  $S_{\infty}(x)$  とすると



$$S_{\infty}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

となる。

$$x = -\frac{1}{2}\pi \text{ のとき } f(x) \text{ は連続で } f\left(-\frac{1}{2}\pi + 0\right) = f\left(-\frac{1}{2}\pi - 0\right) = \frac{\pi}{2} \text{ より } S_{\infty}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \pi \text{ のとき } f(x) \text{ は不連続で } f(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}, f(\pi - 0) = \pi \text{ より}$$

$$S_{\infty}(\pi) = \frac{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

問 例の場合に以下の値を求めよ。

$$(1) S_{\infty}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \quad (2) S_{\infty}(0) = \quad (3) S_{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

## < 一般の周期関数 1 >

例 1 図 1 の曲線は

$$y = \sin(2\pi x)$$

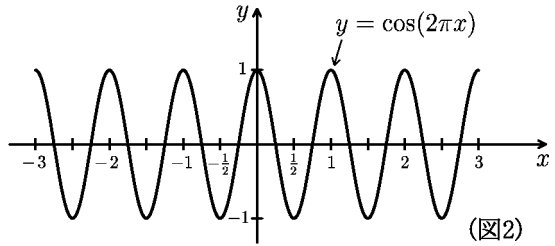
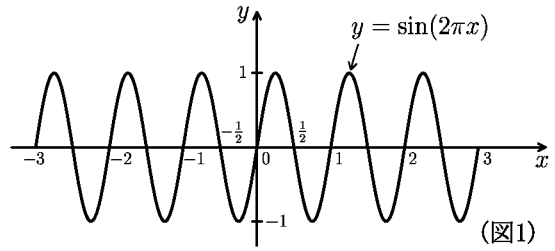
のグラフである。この関数は周期 1 の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 ( $2\pi x$ ) が  $360^\circ = 2\pi$  となるときの、すなわち

$$2\pi x = 2\pi$$

のときは  $x = 1$  であるから周期が 1 になる。図 2 の曲線は

$$y = \cos(2\pi x)$$

であり、同様に周期 1 の周期関数である。



例 2 図 3 の曲線は

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

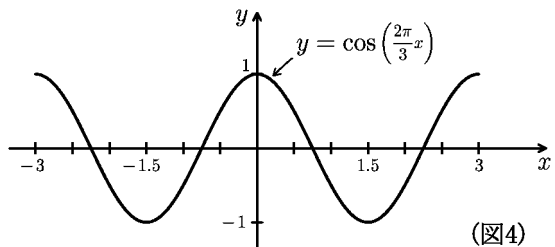
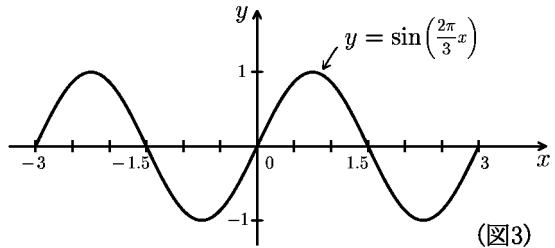
のグラフである。この関数は周期 3 の周期関数である。これは三角関数の角度の部分 ( $\frac{2\pi}{3}x$ ) が  $360^\circ = 2\pi$  となるときの、すなわち

$$\frac{2\pi}{3}x = 2\pi$$

のときは  $x = 3$  であるから周期が 3 になる。図 4 の曲線は

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

であり、同様に周期 3 の周期関数である。



問 次の関数の周期を求めよ。(ただし  $L, l$  は正の実数、 $n$  は自然数である。)

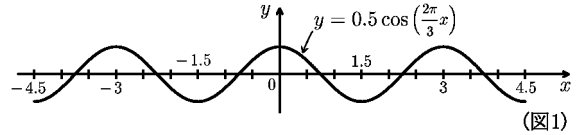
- |  |  |   |
|--|--|---|
| (1) $\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$ | (2) $\cos\left(\frac{2\pi}{7}x\right)$   | (3) $\sin\left(\frac{2\pi}{9}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{9}x\right)$ |
| (4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$  | (5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$    | (6) $\sin(\pi x)$   |
| (7) $\cos(3\pi x)$                     | (8) $\sin(n\pi x)$                       | (9) $\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$                                    |
| (10) $\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ | (11) $\cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$ | (12) $\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$                                   |

## < 一般の周期関数 2 >

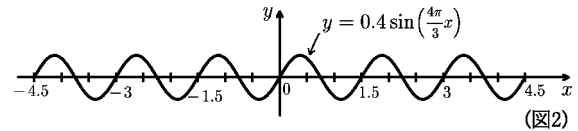
前ページの結果より

$$\sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)$$

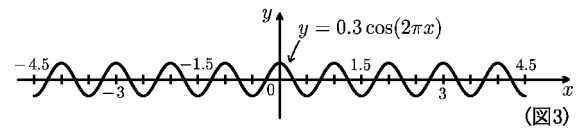
は基本周期が  $L$  の周期関数である。



例 (1)  $y = 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$  は周期 3 の周期関数である (図 1)。



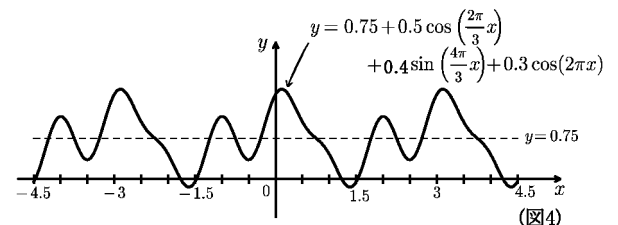
(2)  $y = 0.4 \sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$  は周期  $\frac{3}{2} = 1.5$  の周期関数である (図 2)。



(3)  $y = 0.3 \cos(2\pi x)$  は周期 1 の周期関数である (図 3)。

(4) 上の (1)~(3) の関数と  $y = 0.75$  を加えた和の関数

$$y = 0.75 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 0.4 \sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + 0.3 \cos(2\pi x)$$



は周期 3 の周期関数である (図 4)。

(2) の関数は基本周期が  $\frac{3}{2}$  であるが倍周期が 3 である。(3) の関数も基本周期が 1 であるが 3 倍周期は 3 である。

(5) 一般に定数  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  に対し

$$y = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + \dots \\ \dots + a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)$$

は周期 3 の周期関数である。

問 次の関数の周期を求めよ。

(1)  $y = a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{5}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{5}x\right) \right\}$

(2)  $y = a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right\}$

(3)  $y = a_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right\}$

## < 一般のフーリエ級数 1 >

正の定数  $L$  に対し周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  を考える。 $y = f(x)$  のグラフは  $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$  の範囲の曲線が周期的にくりかえされていく。周期  $2\pi$  の関数の場合と同様に  $f(x)$  のフーリエ級数が考えられる。  
この場合  $f(x)$  のフーリエ級数は

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right\}$$

となる。ここでフーリエ係数  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  は

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx$$
$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) dx \quad (n \geq 1)$$

となる。

**問** 周期関数  $f(x)$  の周期が以下の場合に、上のようにフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。(ただし  $l > 0$ )

(1) 周期  $2l$

(2) 周期  $2\pi l$

## < 一般のフーリエ級数 2 >

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数は 37 ページと同様にその収束が成立する。

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) \right\} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad (\text{フーリエ級数の収束})$$

ただし

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) dx$$

である。ここで、 $f(x)$  が偶関数の場合は

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} f(x) dx, \quad a_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos \left( \frac{2n\pi}{L} x \right) dx, \quad b_n = 0$$

となる。

問 1  $f(x)$  が奇関数の場合のフーリエ係数  $a_0, a_n, b_n$  を求めよ。

$$a_0 = \quad, \quad a_n = \quad, \quad b_n =$$

問 2  $f(x)$  が周期  $2l$  の周期関数の場合、フーリエ級数の収束の式を書け。

問 3  $f(x)$  が問 2 の場合、偶関数の場合と奇関数の場合のフーリエ係数を求めよ。

(1)  $f(x)$  が偶関数のとき

$$a_0 =$$

$$a_n =$$

$$b_n =$$

(2)  $f(x)$  が奇関数のとき

$$a_0 =$$

$$a_n =$$

$$b_n =$$

## < フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数は  $\omega = \frac{2\pi}{L}$  とすると

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\}, \quad \omega = \frac{2\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos(n\omega x) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

となる。ここで虚数単位  $i = \sqrt{-1}$  をとり,  $n \neq 0$  に対し

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad C_{-n} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{in\omega x} dx \quad (n \neq 0)$$

とおくと 25 ページの三角関数の複素数表示から

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

より

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} dx = C_{-n} + C_n$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} dx = \frac{1}{i} C_{-n} - \frac{1}{i} C_n$$

となる。したがって

$$C_n = \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}$$

となる。一方フーリエ級数の第  $n$  項は

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

$$= \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{in\omega x} + \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-in\omega x}$$

$$= \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n i}{2} \right) e^{in\omega x} + \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n i}{2} \right) e^{-in\omega x}$$

問 フーリエ級数の第  $n$  項を  $C_n$  と  $C_{-n}$  を使って表せ。

## < フーリエ級数の複素数表示 2 >

周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  のフーリエ級数

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\}, \quad \omega = \frac{2\pi}{L}$$

の第  $n$  項は前ページの結果より

$$a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = C_n e^{in\omega x} + C_{-n} e^{-in\omega x}$$

ここで

$$C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad C_{-n} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{in\omega x} dx$$

一方  $n = 0$  のとき

$$C_0 = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^0 dx = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) dx = a_0$$

である。よってフーリエ級数の第  $n$  部分  $S_n$  は

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^n \{C_k e^{ik\omega x} + C_{-k} e^{-ik\omega x}\} = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ik\omega x} \end{aligned}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$  とすれば  $f(x)$  のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega x}, \quad \omega = \frac{2\pi}{L}, \quad C_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega x} dx$$

(周期  $L$  の周期関数のフーリエ級数の複素数表示)

と表示できる。これをフーリエ級数の複素数表示という。

問 周期関数  $f(x)$  の周期が以下の場合にフーリエ級数の複素数表示をせよ。  
(ただし  $l > 0$ )

(1) 周期  $2\pi$

(2) 周期  $2\pi l$

## < 広義積分 1 >

定数  $a, b$  ( $a < b$ ) と関数  $f(x)$  に対し定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

を考える。今  $a \rightarrow -\infty$  ,  $b \rightarrow +\infty$  のときの極限值が存在する場合に

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \quad , \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow -\infty}} \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

と表し, 広義の定積分または広義積分という。

例 1 
$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{x=0}^{x=b}$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} e^0 \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2e^{2b}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

例 2 
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-3} x^{-3} \right]_1^b$$
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{3} b^{-3} + \frac{1}{3} (1)^{-3} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

問 次の値を求めよ。(ただし  $t > 0$  ,  $r > 1$ )

(1)  $\int_0^{\infty} e^{-tx} dx =$

(2)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx =$

(3)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx =$

## < 広義積分 2 >

証明は省略するが次の式が成り立つ。

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (2) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

**例 1**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{6}} dx$  を求めたい。  $t = \frac{x}{\sqrt{6}}$  とおくと  $dx = \sqrt{6} dt$  である。

偶関数の積分 (17 ページ) の性質より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{6}} dx &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{6}} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{6} dt \\ &= 2\sqrt{6} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{6\pi} \end{aligned}$$

**例 2**  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x} dx$  を求めたい。  $3x = t$  とおくと  $dx = \frac{1}{3} dt$  より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(3x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{3}} \times \frac{1}{3} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

**例 3**  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(-5x)}{x} dx$  を求めたい。  $5x = t$  とおくと  $dx = \frac{1}{5} dt$  である

ここで  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$  より

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(-5x)}{x} dx = - \int_0^{\infty} \frac{\sin(5x)}{x} dx = - \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{\frac{t}{5}} \times \frac{1}{5} dt = - \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\frac{\pi}{2}$$

**問** 正の数  $\lambda > 0$  に対し、次の定積分の値を求めよ。

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} dx =$

(2)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx =$

(3)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(-\lambda x)}{x} dx =$

## < フーリエ変換 1 >

今後周期関数の変数を  $x$  のかわりに時間変数  $t$  にする。  
 周期  $2\pi l$  の周期関数  $f(t)$  のフーリエ級数は 43 ページより

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{n}{l}\right)t} \quad , \quad C_n = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-i\left(\frac{n}{l}\right)t} dt$$

であった。 $f(t)$  が周期関数でないときはもはやフーリエ級数では表現できない。そのときは周期が無限大 ( $= \infty$ ) の関数と考え、形式的に  $l \rightarrow \infty$  の極限を考えよう。 $f(t)$  は  $|t| > \pi l$  では 0 になると考え

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-ixt} dt$$

とおくと、

$$C_n = \frac{1}{l} F\left(\frac{n}{l}\right)$$

となる。このとき  $f(t)$  のフーリエ級数は

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\left(\frac{n}{l}\right)t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} F\left(\frac{n}{l}\right) e^{i\left(\frac{n}{l}\right)t}$$

となる。ここで  $l \rightarrow +\infty$  の極限を考えると、定積分の区分求積法による定義から

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n}{l}\right) e^{i\left(\frac{n}{l}\right)t} \frac{1}{l} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx$$

となるから

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx \quad , \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

が得られる。 $F(x)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換という。また

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx$$

をフーリエ逆変換という。

## < フーリエ変換 2 >

関数  $f(t)$  に対して

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \quad , \quad f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

とおくと

$$f_e(-t) = f_e(t) \quad , \quad f_o(-t) = -f_o(t)$$

より  $f_e(t)$  は偶関数 (even function) ,  $f_o(t)$  は奇関数 (odd function) であり  $f(t)$  は

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

のように偶関数と奇関数に分けられる。このとき  $f(x)$  のフーリエ変換  $F(x)$  は (偶関数と奇関数の積分 (17 ページ) の性質より)

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(xt) - i \sin(xt) \} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t) \{ \cos(xt) - i \sin(xt) \} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t) \{ \cos(xt) - i \sin(xt) \} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(xt) dt - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f_o(t) \sin(xt) dt \end{aligned}$$

となる。ここで

$$F_e(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(xt) dt \quad , \quad F_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_o(t) \sin(xt) dt$$

とおくと  $F_e(x)$  は偶関数、 $F_o(x)$  は奇関数であり

$$F(x) = F_e(x) - iF_o(x)$$

となる。これから次のことがわかる。

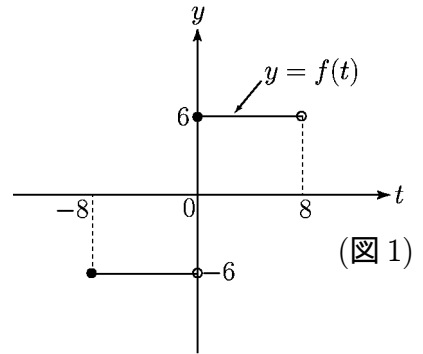
$$(1) \quad f(t) \text{ が偶関数のとき} \quad F(x) = F_e(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(xt) dt \quad (\text{余弦変換})$$

$$(2) \quad f(t) \text{ が奇関数のとき} \quad F(x) = -iF_o(x) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(xt) dt \quad (\text{正弦変換})$$

### < フーリエ変換3 >

例  $f(t)$  が

$$f(t) = \begin{cases} 6 & : 0 \leq t < 8 \\ -6 & : -8 \leq t < 0 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$



であるとき図1のように  $f(t)$  は奇関数であるからフーリエ変換は(前ページより)

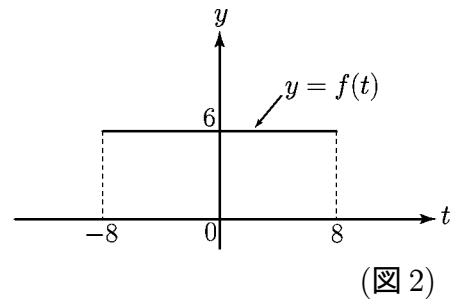
$$F(x) = -iF_0(x) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(xt) dt$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_0^8 6 \sin(xt) dt = -\frac{i}{\pi} \left[ -\frac{6 \cos(xt)}{x} \right]_{t=0}^{t=8} = \frac{6\{\cos(8x) - 1\}}{\pi x} i$$

問

$$f(t) = \begin{cases} 6 & : |t| \leq 8 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

のグラフは図2である。この  $f(t)$  のフーリエ変換  $F(x)$  を求めよ。



関数  $f(t)$  に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

であるとき  $f(t)$  は絶対可積分という。このような場合でないときフーリエ変換

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

は求まらない。たとえば  $f(t)$  が

$$\cos(t) \quad , \quad \sin(t) \quad , \quad \cos(nt) \quad , \quad \sin(nt)$$

などの周期関数は絶対可積分ではないのでフーリエ変換は求まらない。

## < フーリエ変換 4 >

$f(t)$  を偶関数部分  $f_e(t)$  と奇関数部分  $f_o(t)$  に分けたとき

$$F_e(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(xt) dt, \quad F_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_o(t) \sin(xt) dt$$

とおくと,  $f(t)$  のフーリエ変換  $F(x)$  は 47 ページより

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = F_e(x) - iF_o(x) \quad (\text{フーリエ変換})$$

となった。これに対し逆変換は (偶関数と奇関数の積分の性質より)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \{ \cos(xt) + i \sin(xt) \} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_e(x) \{ \cos(xt) + i \sin(xt) \} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} F_o(x) \{ \cos(xt) + i \sin(xt) \} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_e(x) \cos(xt) dx - (i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_o(x) \sin(xt) dx \end{aligned}$$

となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx = 2 \int_0^{\infty} F_e(x) \cos(xt) dx + 2 \int_0^{\infty} F_o(x) \sin(xt) dx \quad (\text{逆変換})$$

が成立する。このことから次のことがわかる。

$$\begin{aligned} (1) \quad f(t) \text{ が偶関数のとき} \quad f(t) &\sim 2 \int_0^{\infty} F_e(x) \cos(xt) dx \quad (\text{余弦逆変換}) \\ (2) \quad f(t) \text{ が奇関数のとき} \quad f(t) &\sim 2 \int_0^{\infty} F_o(x) \sin(xt) dx \quad (\text{正弦逆変換}) \end{aligned}$$

37 ページのフーリエ級数と同様に  $f(t)$  が絶対可積分ならばフーリエ逆変換は連続点で  $f(t)$  に一致する。一般には

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixt} dx = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt \quad (\text{反転公式})$$

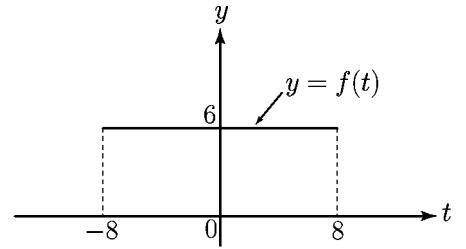
がなりたつ。この公式を反転公式という。

## < フーリエ変換 5 >

例  $f(t) = \begin{cases} 6 & : |t| \leq 8 \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$

の場合にフーリエ変換は 48 ページより

$$F(x) = \frac{6 \sin(8x)}{\pi x}$$



であった。 $f(t)$  は偶関数だから  $F(x)$  も偶関数で、その逆変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx = 2 \int_0^{\infty} F(x) \cos(xt) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{6 \sin(8x)}{\pi x} \cos(xt) dx$$

となる。ここで積和公式 (5 ページ) より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt} dx &= \frac{12}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \{ \sin(8x) \cos(xt) \} dx \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \{ \sin(8x + xt) + \sin(8x - xt) \} dx \\ &= \frac{6}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin((8+t)x)}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin((8-t)x)}{x} dx \right\} = I(t) \end{aligned}$$

となる。一方 45 ページから

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : \lambda > 0 \\ 0 & : \lambda = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & : \lambda < 0 \end{cases}$$

であるので

(1)  $t > 8$  のとき  $8+t > 0, 8-t < 0$  より

$$I(t) = \frac{6}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} = 0$$

(2)  $t = 8$  のとき  $8+t > 0, 8-t = 0$  より

$$I(t) = \frac{6}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + 0 \right\} = 3$$

(3)  $-8 < t < 8$  のとき  $8+t > 0, 8-t > 0$  より

$$I(t) = \frac{6}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right\} = 6$$

問 次の場合にフーリエ逆変換  $I(t)$  を求めよ。

$t = -8$  のとき

$t < -8$  のとき

$I(t) =$

$I(t) =$