＜重積分の変数変換＞

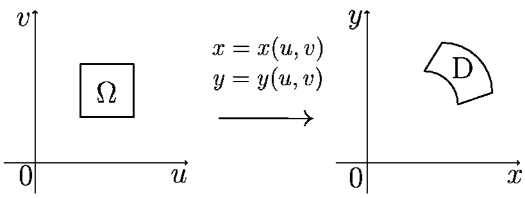
一変数関数の定積分の置換積分

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = \int_{u=\alpha}^{u=\beta} f\big(x(u)\big)\frac{dx}{du}du} \qquad \left(\begin{array}{l} x = x(u) \\ a = x(\alpha)\ ,\ b = x(\beta) \end{array}\right)$$

と同様に２変数関数 $f(x,y)$ に対し、x と y が u と v の関数であり、

$$x = (u,v)\ ,\ y = y(u,v)$$

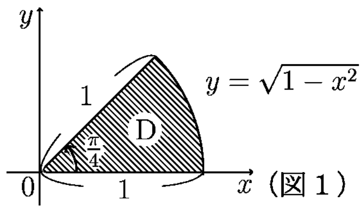
によって、uv 平面上の領域 Ω が xy 平面上の領域Dに移されるとき、



$$\boxed{\iint_{\mathrm{D}} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega} f\big(x(u,v)\ ,\ y(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv}$$

が成り立つ。ここで $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ は前ページの面積比である。

例 領域Ｄが図１の場合に $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めたい。

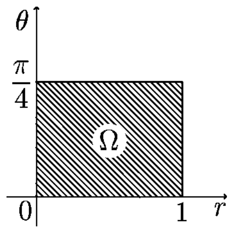


（図１）

極座標変換

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

によって $r\theta$ 平面上の長方形領域 Ω(図２) は xy 平面上の領域 D(図１) に移される。前ページより



（図２）

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \quad , \quad -x^2-y^2 = -r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2$$

であるから

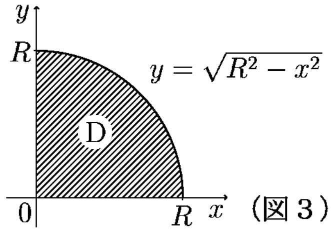
$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\Omega} e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}drd\theta = \iint_{\Omega} e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right\}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=1}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1-e^{-1})d\theta = \frac{\pi}{8}(1-e^{-1})$$

問 xy 平面上の領域Ｄが図３の場合に次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{\mathrm{D}} e^{-x^2-y^2}dxdy =$$



（図３）