<2元連立一次方程式2>

2元連立一次方程式で右辺が0の場合

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

を考える。もし係数行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ならば、クラメルの公式より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

より、解は $x = y = 0$ だけである。しかし $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ の場合は $x = y = 0$ 以外にも解がある。

例 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - \ \ 3y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2) \\ 8x - 12y = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3) \end{cases}$$

を考える。このとき係数行列式は

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

になる。(3) 式を4で割ると (2) 式と同じ式になる。従って (2) 式をみたす x と y の組は全て (2) と (3) の解である。たとえば

$$x = 3 \quad , \quad y = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

は解である。一般に任意の実数 t に対し

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

は (2)·(3) の解である。逆に (2) と (3) の全ての解は (5) の形をしている。

一般に (1) 式において、$x = y = 0$ 以外の解をもつための必要十分条件は
係数行列式が0になることである。

$$\boxed{(1)\text{ 式が } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 以外の解をもつ} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$$

問 次の連立方程式をみたす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求め、(5) 式のように表せ。

(1) $\begin{cases} 3x + \ \ y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \ \ 2x + \ \ 3y = 0 \\ 14x + 21y = 0 \end{cases}$