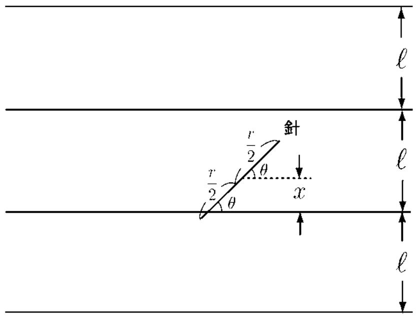
< ビュッホンの針と確率 >

1733 年にビュッホン (Buffon) は偶然に関するいくつかの問題の解法をパリ科学アカデミーに送った。この中に現在「ビュッホンの針」と言われている問題がある。

問題　「広い平面が等距離の平行直線群で区切られている。小さな細い針が投げ落とされる。その針が 1 本の線と交わる確率を求めよ。」

厳密に言えば、この問題には「正解」がない。どのように投げられるかを定めてないからである。平行線に平行な状態の針を落とすと確率は低くなり, 平行線と垂直な状態の針を落とすと確率は高くなる。



この問題を回答した人は次の仮定を暗黙の了解として認めている。

仮定　「針は全く無作為に投げる。落ちた位置と向きに関してあらゆる可能性が同程度にある。」

この仮定をもう少し正確に説明する。2 本の平行線の距離を ℓ, 針の長さを r, 針の中心から平行線までの距離を x, 針と平行線のなす角度を θ とする。
上の仮定は次の三つの仮定 (1)〜(3) に分解される。

仮定 (1)　x は 0 から $\dfrac{\ell}{2}$ までの範囲で等確率 (一様) に起こる。

仮定 (2)　θ は 0 から π までの範囲で等確率 (一様) に起こる。

仮定 (3)　x と θ は無関係 (独立) である。

記号 $P(A)$ を「A が起こる確率」として, 仮定 (1)〜(3) を数学的に書きなおすと次のようになる。

仮定 (1) : $P(a \leqq x \leqq b) = \dfrac{b-a}{\frac{\ell}{2}}$　　$\left(0 \leqq a < b \leqq \dfrac{\ell}{2}\right)$

仮定 (2) : $P(c \leqq \theta \leqq d) = \dfrac{d-c}{\pi}$　　$\left(0 \leqq c < d \leqq \pi\right)$

仮定 (3) : $P(x \in A$　かつ　$\theta \in B)$
$= P(x \in A) \times P(\theta \in B)$　　$\left(\begin{array}{l} A \subset \left[0\,,\ \dfrac{\ell}{2}\right] \\ B \subset [0\,,\ \pi] \end{array}\right)$

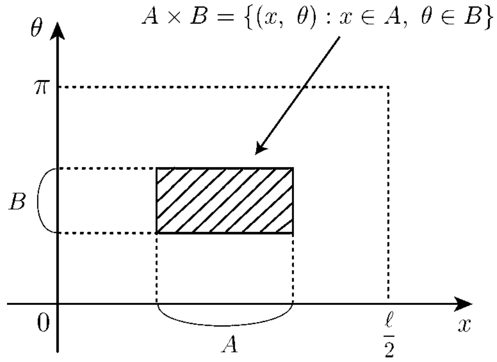
以上から「$x \in A$」と「$\theta \in B$」が同時に起こる確率は

$P(x \in A$　かつ　$\theta \in B)$

$$= \frac{A\text{の長さ}}{\frac{\ell}{2}} \times \frac{B\text{の長さ}}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\frac{\ell}{2} \times \pi}(A \times B \text{ の面積})$$

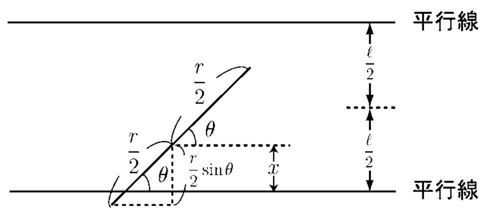
$$= \frac{2}{\pi\ell}\iint_{A\times B} 1 dx d\theta$$



である。このように仮定すれば, よく知られた答えが得られる。

〈 $\boldsymbol{r} \leqq \boldsymbol{\ell}$ の場合の答え 〉

「針が直線を横ぎる確率」



$$= P\left(x < \frac{r}{2}\sin\theta,\ \ 0 < x < \frac{\ell}{2},\ \ 0 < \theta < \pi\right)$$

$$= \frac{2}{\pi\ell}\iint_{\{x < \frac{r}{2}\sin\theta,\ 0 < x < \frac{\ell}{2},\ 0 < \theta < \pi\}} 1 dx d\theta$$

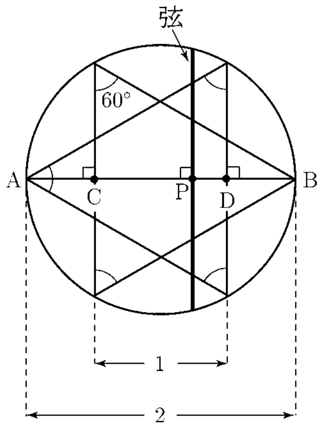
$$= \frac{2}{\pi\ell}\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\frac{r}{2}\sin\theta} 1dx\right\}d\theta = \frac{2}{\pi\ell}\int_0^{\pi}\frac{r}{2}\sin\theta d\theta = \frac{r}{\pi\ell}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2r}{\pi\ell}$$

コンピューターシミュレーションでこの問題の実験を行う場合, 仮定 (1)〜(3) を満たすような乱数 $x,\ \theta$ を用いて実験する。

「ビュッホンの針」の問題では上記の仮定が多くの人に認められやすいものであるから, 問題の「曖昧さ」に気がつきにくい。それに対し, 次の J.Bertrand(1822-1900) が提出した問題は人によって認める仮定が違う。

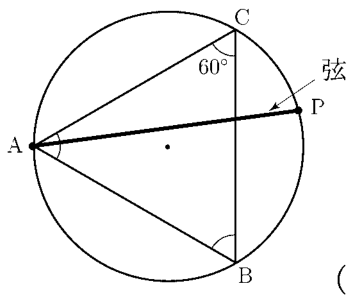
問題「円に引いた任意の弦の長さが内接正三角形の一辺の長さ以上になる確率を求めよ。」

(Bertrand の問題)



(図1)

[解答 1]　図 1 の直径 AB に垂直な弦を考える。弦の長さが内接三角形の一辺より大きくなるのは図 1 の弦が線分 CD 上の点 P を通るときである。AB の長さを 2 とすれば CD の長さは 1 なので、求める確率は $\frac{1}{2}$ である。



(図2)

[解答 2]　図 2 の円周上の点 A を通る弦を考える。A を通る内接正三角形を ABC とする。A を通る弦の長さが AB = AC より長くなるのは弦のもう一端 P が弧 BC 上にあるときである。弧 BC の長さは円周の $\frac{1}{3}$ であるから、求める確率は $\frac{1}{3}$ である。

もちろんこの問題に正解はない。問題の仮定が書いてないので, 人によってかってに仮定をすれば, その仮定に応じ答がたくさんできる。この話の詳しい解説は小針 晛宏著「確率・統計入門」(岩波書店) を参照されたい。

(文責　井上昌昭)

＜三角関数の極限について＞

三角関数の導関数を求めるためには次の極限

(∗) $$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

が基本になる。この極限式を証明するために次の不等式

(∗∗) $$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \quad \sin\,\theta \;<\; \theta \;<\; \tan\theta}$$

を使う。高等学校数Ⅲの教科書では不等式 (∗∗) を示すために扇形の面積を用いて説明している本があるが, これは循環論法になる。扇形の面積は円の面積から導かれるが, 円の面積を求めるときに三角関数の微分法を使う。つまり円の面積を求めるときには極限式 (∗) の結果を使っていることになり, そこで循環論法に陥る。この矛盾を防ぐためには不等式 (∗∗) を面積を使わずに証明しなければならない。ここではその 1 つのアイディアを紹介する。

＜ (∗∗) の証明＞

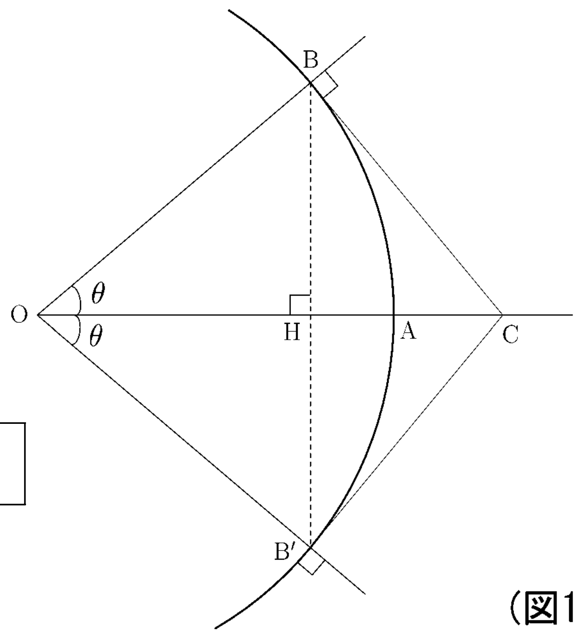
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である角 θ に対し, 図 1 のように, 中心角 2θ, 半径 1 の扇形 $\mathrm{OBB'}$ を考える。このとき

$$\begin{cases} \mathrm{OB} = \mathrm{OA} = \mathrm{OB'} = 1 \\ \mathrm{BH} = \sin\theta,\ \ \mathrm{BC} = \tan\theta \\ \text{弧 AB の長さ} = \theta \end{cases}$$

より (∗∗) を示すためには

(∗∗)′ $$\boxed{\mathrm{BB'} \;<\; \text{弧}\,\mathrm{BB'} < \mathrm{BC}+\mathrm{B'C}}$$

を示せばよい。



(図1)

$(**)'$ を証明するために弧 BB$'$ を近似する折れ線を次の 2 通り用意する。

$$\begin{cases} \ell_n : \text{弧 BB}'\text{に対する内側折れ線の長さ} \\ L_n : \text{弧 BB}'\text{に対する外側折れ線の長さ} \end{cases}$$

以下 n に関して帰納的に定義する。

[$n=1$ のとき]

$$\begin{cases} \ell_1 = \text{線分 BB}'\text{の長さ} \quad : \quad \text{弧 BB}' \text{ に対する弦の長さ} \\ L_1 = \text{BC} + \text{B}'\text{C} \quad : \quad \text{弧 BB}' \text{ に対する外接折れ線の長さ} \end{cases}$$

図 1 の弧 BB$'$ に対し, 折れ線 BCB$'$ を「弧 BB$'$ に対する外接折れ線」と言うことにする。このとき

$\ell_1 = 2\sin\theta \quad , \quad L_1 = 2\tan\theta$

である。

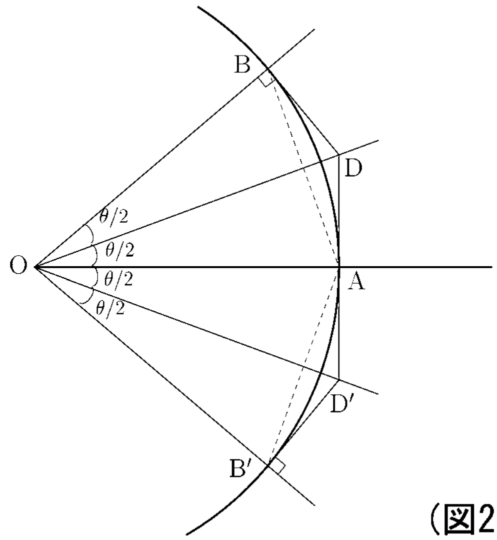
[$n=2$ のとき]

図 2 で

$$\begin{cases} \ell_2 = \text{BA+B}'\text{A} \\ L_2 = \text{BD+DA+AD}'\text{+D}'\text{B}' \end{cases}$$

とおくと

$\ell_2 = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \quad , \quad L_2 = 4\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$



（図2）

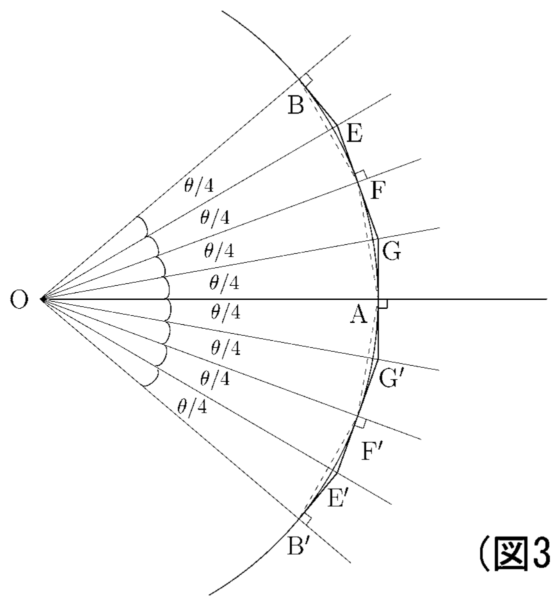
[$n=3$ のとき]

図 3 で

$$\begin{cases} \ell_3 = \text{BF+FA+AF}'\text{+F}'\text{B}' \\ L_3 = \text{BE+EF+FG+GA} \\ \qquad +\text{AG}'\text{+G}'\text{F}'\text{+F}'\text{E}'\text{+E}'\text{B}' \end{cases}$$

とおくと

$\ell_3 = 8\sin\left(\dfrac{\theta}{4}\right) \quad , \quad L_3 = 8\tan\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$



（図3）

以下このように $\ell_n,\ L_n$ を定めていくと

$$\begin{cases} \ell_n : \text{弧 BB}' \text{を } 2^{n-1} \text{等分した弧に対する弦の長さの } (2^{n-1} \text{個の}) \text{ 和} \\ L_n : \text{弧 BB}' \text{を } 2^{n-1} \text{等分した弧に対する外接折れ線の長さの } (2^{n-1} \text{個の}) \text{ 和} \end{cases}$$

となり、それを求めると

$$\ell_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \quad , \quad L_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$

となる。この式から

◎$_1$ $\boxed{\ell_1 \leqq \ell_n < \ell_{n+1} < L_{n+1} < L_n \leqq L_1}$ $(n \geqq 1)$

◎$_2$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} (L_n - \ell_n) = 0}$

が得られる。この 2 式と ℓ_n , L_n の幾何学的な位置関係より

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = \text{弧 BB}' \text{の長さ} = \lim_{n\to\infty} L_n$$

がわかる。従って ◎$_1$ より

$$\ell_1 < \text{弧 BB}' \text{の長さ} < L_1$$

より $(**)'$ が示される。(証明終)

(文責　井上昌昭)