三角関数の極限について

三角関数の導関数を求めるためには次の極限

$$(*) \qquad \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

が基本になる。この極限式を証明するために次の不等式

$$(**) \qquad \boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \sin\ \theta\ <\ \theta\ <\ \tan\theta}$$

を使う。高等学校数Ⅲの教科書では不等式 $(**)$ を示すために扇形の面積を用いて説明している本があるが, これは循環論法になる。扇形の面積は円の面積から導かれるが, 円の面積を求めるときに三角関数の微分法を使う。つまり円の面積を求めるときには極限式 $(*)$ の結果を使っていることになり, そこで循環論法に陥る。この矛盾を防ぐためには不等式 $(**)$ を面積を使わずに証明しなければならない。ここではその 1 つのアイディアを紹介する。

$<$ $(**)$ の証明 $>$

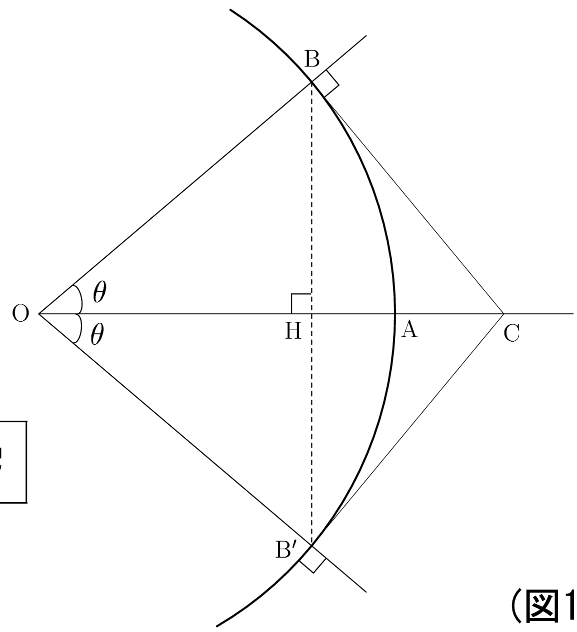
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である角 θ に対し, 図 1 のように, 中心角 2θ, 半径 1 の扇形 $\mathrm{OBB'}$ を考える。このとき

$$\begin{cases} \mathrm{OB} = \mathrm{OA} = \mathrm{OB'} = 1 \\ \mathrm{BH} = \sin\theta,\ \ \mathrm{BC} = \tan\theta \\ \text{弧}\,\mathrm{AB}\,\text{の長さ} = \theta \end{cases}$$

より $(**)$ を示すためには

$$(**)' \qquad \boxed{\mathrm{BB'}\ < \text{弧}\,\mathrm{BB'} < \mathrm{BC}+\mathrm{B'C}}$$

を示せばよい。



(図1)

$(**)'$ を証明するために弧 BB' を近似する折れ線を次の 2 通り用意する。

$$\begin{cases} \ell_n : \text{弧 BB}'\text{に対する内側折れ線の長さ} \\ L_n : \text{弧 BB}'\text{に対する外側折れ線の長さ} \end{cases}$$

以下 n に関して帰納的に定義する。

[$n=1$ のとき]

$$\begin{cases} \ell_1 = \text{線分 BB}'\text{の長さ} \quad : \quad \text{弧 BB}'\text{ に対する弦の長さ} \\ L_1 = \mathrm{BC} + \mathrm{B'C} \quad : \quad \text{弧 BB}'\text{ に対する外接折れ線の長さ} \end{cases}$$

図 1 の弧 BB' に対し, 折れ線 BCB' を「弧 BB' に対する外接折れ線」と言うことにする。このとき

$\ell_1 = 2\sin\theta$, $L_1 = 2\tan\theta$

である。

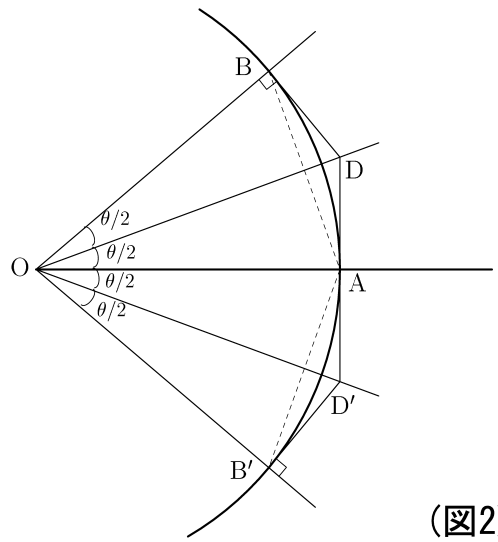
[$n=2$ のとき]

図 2 で

$$\begin{cases} \ell_2 = \mathrm{BA} + \mathrm{B'A} \\ L_2 = \mathrm{BD} + \mathrm{DA} + \mathrm{AD'} + \mathrm{D'B'} \end{cases}$$

とおくと

$\ell_2 = 4\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $L_2 = 4\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$



(図2)

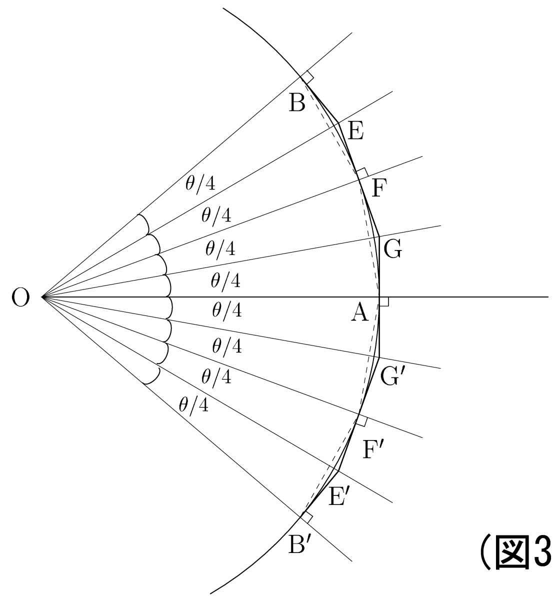
[$n=3$ のとき]

図 3 で

$$\begin{cases} \ell_3 = \mathrm{BF} + \mathrm{FA} + \mathrm{AF'} + \mathrm{F'B'} \\ L_3 = \mathrm{BE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FG} + \mathrm{GA} \\ \qquad + \mathrm{AG'} + \mathrm{G'F'} + \mathrm{F'E'} + \mathrm{E'B'} \end{cases}$$

とおくと

$\ell_3 = 8\sin\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$, $L_3 = 8\tan\left(\dfrac{\theta}{4}\right)$



(図3)

以下このように ℓ_n, L_n を定めていくと

$$\begin{cases} \ell_n : \text{弧 BB}' \text{を } 2^{n-1} \text{等分した弧に対する弦の長さの } (2^{n-1} \text{個の}) \text{ 和} \\ L_n : \text{弧 BB}' \text{を } 2^{n-1} \text{等分した弧に対する外接折れ線の長さの } (2^{n-1} \text{個の}) \text{ 和} \end{cases}$$

となり、それを求めると

$$\ell_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right) \quad , \quad L_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)$$

となる。一方 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して，次の不等式

① $\sin\theta < \tan\theta$　　② $\sin\theta < 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$　　③ $2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) < \tan\theta$

が成り立つ。この式から

◎$_1$ $\boxed{\ell_1 \leqq \ell_n < \ell_{n+1} < L_{n+1} < L_n \leqq L_1}$　　$(n \geqq 1)$

◎$_2$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} (L_n - \ell_n) = 0}$

が得られる。◎$_1$ 式より数列 $\{\ell_n\}$, $\{L_n\}$ はともに収束し，◎$_2$ 式より極限値が一致することがわかる。すなわち

◎$_3$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \ell_n = \lim_{n\to\infty} L_n}$

がわかる。一方，弧 BB$'$ の長さは折れ線の極限だから

◎$_4$ $\boxed{\text{弧 BB}' \text{の長さ} = \lim_{n\to\infty} \ell_n}$

である。従って

◎$_5$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \ell_n = \text{弧 BB}' \text{の長さ} = \lim_{n\to\infty} L_n}$

がいえる。◎$_1$, ◎$_5$ より

$$\ell_1 < \text{弧 BB}' \text{の長さ} < L_1$$

が得られる。これは不等式 $(**)'$ に他ならない。(証明終)

＜追記…◎$_4$の補足説明＞

「弧の長さが内接折れ線の極限として得られることについて」

座標平面上の曲線 $\{(x(t), y(t)) \;:\; a \leqq t \leqq b\}$ の長さ L は，$[a, b]$ の任意の分割

$$\varDelta \;:\; a = t_0 \;<\; t_1 \;<\; \cdots \;<\; t_n = b$$

に対して，折れ線の長さ

$$L_\varDelta = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\bigl(x(t_k) - x(t_{k-1})\bigr)^2 + \bigl(y(t_k) - y(t_{k-1})\bigr)^2}$$

の上限

$$L = \sup_{\varDelta} L_\varDelta$$

で定義される。

特に $x(t), y(t)$ が微分可能で，$x'(t), y'(t)$ が連続のときは次のことが成立する。分割 $\varDelta$ の小区間の個数 n を限りなく大きくし，小区間の最大幅 $\displaystyle\max_{1 \leqq k \leqq n}(t_k - t_{k-1})$ を限りなく小さくすると，$L_\varDelta$ は一定の値に収束し，その極限は

$$\lim L_\varDelta = \int_a^b \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2}\, dt = L$$

となる。

◎$_4$ の場合，$a = -\sin\theta,\ b = \sin\theta,\ x(t) = \sqrt{1 - t^2},\ y(t) = t$ とおくと，弧 BB' は曲線 $\{(x(t), y(t)) \;:\; a \leqq t \leqq b\}$ である。この $x(t), y(t)$ は微分可能で，$x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$，$y'(t) = 1$ は $[a, b]$ で連続である。$[a, b]$ の分割として

$$\varDelta \;:\; a = t_0 \;<\; t_1 \;<\; \cdots \;<\; t_{2^{n-1}} = b$$

$$\left(t_k = \sin(\theta_k),\ \theta_k = -\theta + \frac{k\theta}{2^{n-2}},\ k = 0, 1, \cdots, 2^{n-1}\right)$$

を選ぶと

$$L_\varDelta = \ell_n$$

となる。ここで n を限りなく大きくすると，分割の最大幅 $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)$ は限りなく 0 に近づき，$L_\varDelta$ は曲線の長さに収束するから

$$\lim_{n \to \infty} \ell_n = \lim L_\varDelta = \text{弧}\,\mathrm{BB}'\text{の長さ}$$

がわかる。

(文責　井上昌昭)